ANALYSE NUMÉRIQUE NON-LINÉAIRE DES STRUCTURES EN BÉTON À PAROIS MINCES

THÈSE N^{o} 2056 (1999)

PRÉSENTÉE AU DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES TECHNIQUES

PAR

Stéphane ROSSIER

Ingénieur civil diplômé EPF

de nationalité suisse et originaire de Neyruz (FR)

acceptée sur proposition du jury:

Prof. R. Favre, directeur de thèse
Dr A. Bouberguig, rapporteur
Dr O. Burdet, rapporteur
Prof. M. Prat, rapporteur
Prof. A. Schleiss, rapporteur
Dr P. Steffen, rapporteur

Lausanne, EPFL
1999

Sommaire

Préface

Le comportement d'une structure en béton armé ou béton précontraint à l'état de service est avant tout tributaire de l'état permanent. Celui-ci comprend toutes les actions permanentes telles le poids propre de la structure, les charges permanentes, éventuellement des charges mobiles quasi-permanentes, l'effet d'une précontrainte, le retrait et des tassements différentiels. Pour connaître les efforts permanents sollicitant une structure, on se contente souvent d'une analyse élastique qui suppose que la structure est composée d'éléments en béton homogène isotrope. Pour tenir compte du comportement réel, on est obligé d'introduire l'effet du fluage et de la fissuration. Couramment, deux solutions sont adoptées à cet effet :

1. Prise en compte détaillée et locale de l'interaction béton/acier avec des lois constitutives fondamentales de ces matériaux et de leur adhérence. Il en résulte des enseignements directs sur la fissuration mais au détriment d'enseignements globaux.
2. Utilisation de modèles globaux, tels des lois moment-courbure non linéaires. Ces approches donnent d'excellents résultats globaux pour des structures en barres, mais ne permettent pas de traiter le détail des efforts dans les sections.

Ce travail de thèse, et c'en est l'originalité, adopte une solution intermédiaire. En effet, il introduit une nouvelle loi constitutive du béton armé ou précontraint, fissuré ou non, y.c. l'effet du fluage, sous forme d'une interprétation adéquate du modèle du tirant. Ce modèle admet la loi trilinéaire entre l'effort normal et l'allongement du tirant qui provient des travaux du CEB.

Cette nouvelle loi constitutive du béton est utilisée par Stéphane Rossier pour décrire les déformations membranaires d'un élément coque. Il en découle des rigidités modifiées suite aux efforts normaux principaux de traction ou compression. Ainsi est introduite l'orthotropie du béton armé provenant de la fissuration et du fluage. Ces rigidités modifiées ont été introduites dans les éléments finis du programme coque MAPS qui a déjà fait ses preuves depuis bien des années dans le domaine des analyses élastiques.

Ce nouveau logiciel permet de connaître, à l'état de service, quels sont les efforts normaux et les déformations à court ou à long terme qui apparaissent dans une structure à parois minces. Il permet de traiter par exemple des ponts à caissons ou à section ouverte, des sheds formés de voiles autoporteurs, des parois porteuses, mais également des sections massives grâce à leur subdivision en couches minces.

Stéphane Rossier a très bien su mettre en évidence par des études paramétriques effectuées sur des cas concrets, des enseignements d'un grand intérêt en ce qui concerne l'aptitude au

service. Sa contribution doit permettre d'étudier une structure délicate de façon beaucoup plus réaliste qu'à travers un calcul élastique ce qui peut être indispensable par exemple dans les cas de pathologie d'une construction existante.

Je lui souhaite pleine réussite également dans ses activités professionnelles futures.

Prof. Renaud Favre

Remerciements

Cette recherche a été réalisée à l'Institut de Béton Armé et Précontraint (IBAP) de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, sous la direction du Professeur R. Favre et du Dr O. Burdet, tous deux membres du jury. Je tiens à leur exprimer mes plus sincères remerciements pour leurs conseils, leur grande disponibilité et leur soutien. Ma reconnaissance s'adresse également à l'EPFL pour l'importance des moyens mis à disposition.

Je tiens à remercier les autres membres du jury, à savoir le Professeur W.-H. Graf de l'EPFL, président du jury, le Dr A. Bouberguig de la société MAPS Diffusion SA (Lausanne), le Professeur M. Prat du Service d'Études Techniques des Routes et Autoroutes (SETRA, Paris), le Professeur A. Schleiss de l'EPFL et le Dr P. Steffen de la société Cubus AG (Zürich).

Je remercie la société MAPS Diffusion SA qui m'a offert l'opportunité de réaliser cette recherche. Je remercie plus particulièrement le Dr A. Bouberguig et P. Moreno qui m'ont suivi tout au long de ce travail.

Mes remerciements vont également à mes compagnons de route, le Dr G. Krüger (IBAP), le Dr P. Laurencet (ESM - Sarrasin Ingénieurs SA, St-Maurice) et le Dr J.-D. Rotilio (Rotilio Ingénierie, Neuchâtel), avec qui j'ai eu de nombreuses, fructueuses et interminables discussions, tant sur le plan professionnel que personnel.

J'adresse un merci particulier à Mademoiselle S. Ferreira et à Monsieur B. Gardel pour toutes ces petites choses qu'on oublie et qui nous rendent la vie tellement plus facile...

Au cours de ce travail, j'ai souvent eu l'occasion d'échanger des idées et des informations avec beaucoup de collègues de l'EPFL et de l'extérieur. Je les remercie tous pour leur disponibilité et l'intérêt qu'ils ont manifesté. J'aimerais cependant citer O. Bernard, le Dr H. Charif, B. Fleury, le Dr J.-P. Jaccoud et le Dr P. Mivelaz.

Lausanne, le 18 octobre 1999

Stéphane Rossier

Résumé

Le but du présent travail est de contribuer à la compréhension et au juste dimensionnement des structures en béton armé et précontraint. Alors que dans le passé l'état de service était relativement central lors du dimensionnement des ouvrages (calcul aux contraintes admissibles), il a quelque peu disparu depuis l'introduction des concepts plus modernes de la théorie de la plasticité. Or cette approche est insuffisante pour garantir un bon comportement à l'état de service. Cela a parfois été démontré par des ouvrages dont la sécurité est certes suffisante, mais dont le comportement à long terme est insatisfaisant et dont la maintenance s'avère très onéreuse.

Le programme développé dans le cadre de cette thèse a pour but de proposer un outil de calcul facile d'accès pour l'analyse des structures en béton armé et précontraint, prenant en compte les effets différés et la fissuration. Un tel outil permet une meilleure appréhension des aspects d'aptitude au service et de durabilité des ouvrages.

Un modèle de comportement général de membrane en béton armé a été développé et implémenté dans un code de calcul en coque existant. Dérivé de la loi du tirant CEB-FIP, ce modèle de calcul permet l'analyse du comportement à long terme de structures en béton à parois minces à comportement essentiellement membranaire. Le modèle inclut la prise en compte de la fissuration et du fluage, ainsi que toutes les actions permanentes et la précontrainte. Il permet l'analyse de structures composées d'assemblage de parois minces, comme par exemple les ponts à caisson.

La comparaison des résultats obtenus avec des résultats théoriques et expérimentaux a permis de confirmer la validité du modèle. Il a ensuite été appliqué à des exemples dans le but d'étudier certains aspects du comportement des structures à parois minces. Une première famille de cas traite de l'influence de la quantité de précontrainte sur un pont caisson type à trois travées, en mettant l'accent sur les déformations liées au cisaillement. Deux autres exemples, une poutre simple et une poutre cloison en béton armé, abordent le comportement en service de structures dimensionnées à la rupture avec la liberté qu'autorise la théorie de la plasticité, et plus particulièrement la question des contraintes dans les armatures.

Ces applications numériques ont conduit d'une part à des enseignements concernant la modélisation des structures, que ce soit à l'aide d'un outil de calcul tel que celui qui a été développé ici, ou par des méthodes simplifiées, plus traditionnelles. D'autre part, elles ont permis de discuter les règles de dimensionnement usuellement appliquées.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit will einen Beitrag leisten zum Verständnis des Stahl- und Spannbetons sowie deren Bemessung. Während in der Vergangenheit dem Gebrauchszustand bei der Bemessung eine relativ zentrale Rolle zukam (Spannungsnachweise), ist er mit den modernen, auf den Bruchzustand ausgerichteten Sicherheitskonzepten in den Hintergrund gedrängt worden (Plastizitätstheorie). Dieser Ansatz reicht aber nicht aus, um ein befriedigendes Verhalten im Gebrauchszustand zu garantieren. Dies zeigte sich manchmal an Bauwerken, deren Sicherheit zwar genügend ist, deren Langzeitverhalten aber unzureichend und deren Unterhalt sehr teuer ist.

Die Zielsetzung für das Rechenprogramm, das im Rahmen dieser Dissertation entwickelt wurde, war, ein benutzerfreundliches Werkzeug bereitzustellen für die Berechnung von Stahl- und Spannbeton mit Einbezug der Rissbildung und der Langzeitvorgänge. Dieses Werkzeug erlaubt ein besseres Verständnis der Gebrauchstauglichkeit und der Dauerhaftigkeit der Bauten.

Es wurde ein Modell für das Verhalten einer Stahlbetonscheibe erstellt und in ein bestehendes Rechenprogramm für Schalen implementiert. Dieses Modell wurde vom CEB-FIP Betonzuggurtmodell für den Gebrauchzustand abgeleitet und ermöglicht die Analyse des Langzeitverhaltens von Bauwerken, die aus Stahlbetonscheiben zusammengesetzt sind. Das Modell berücksichtigt Rissbildung und Kriechen unter ständigen Lasten und Vorspannkräften.

Die Gültigkeit des Modelles konnte mit Vergleichen von theoretischen und experimentellen Resultaten bestätigt werden. Das Modell wurde hierauf auf ausgewählte Strukturen angewendet, um bestimmte Aspekte des Verhaltens von tragwerken aus Stahlbetonscheiben zu studieren. Ein Fall untersucht den Einfluss des Vorspanngrades bei einer dreifeldrigen Hohlkastenbrücke, mit Schwergewicht auf die Schubverformungen. Zwei andere Tragwerke wurden für ausreichende Tragsicherheit mit Hilfe der Plastizitätstheorie bemessen, und darauf ihr Verhalten im Gebrauchszustand zu untersuchen. Es handelt sich um einen einfachen Balken und eine quadratische Scheibe aus Stahlbeton, für die die Spannungen in der Bewehrung analysiert wurden.

Die Anwendungen des Rechenprogramms haben zu Erkenntnissen für die Modellierung von Stahlbetonschalen mit nichtlinearen Ansätzen geführt. Zudem konnten mit Hilfe des Rechenprogramms einige Fragen der Bemessung von Stahlbetonelementen diskutiert werden.

Summary

The goal of this research is to contribute to the understanding of the behavior and the judicious design of reinforced and prestressed concrete structures. Whereas in the past the service state was relatively central during structural dimensioning (allowable stress design), it somewhat disappeared since the introduction of the more modern concepts of the theory of plasticity. However this is not necessarily sufficient to guarantee serviceability. This was sometimes shown by structures with clearly adequate structural safety, but with unsatisfactory long-term behavior and with very expensive maintenance.

The purpose of the program developed within the framework of this dissertation is to make available a computational tool for the analysis of reinforced and prestressed concrete structures which accounts for time dependent effects and cracking. Such a tool should make possible an improved approach to the serviceability and durability aspects of structural concrete design.

A general behavior model for reinforced concrete membranes was developed and implemented in an existing shell computer code. Derived from the CEB-FIP concrete tie relationship, this model allows the three-dimensional analysis of the long-term behavior of concrete structures with thin walls dominated by membrane behavior. The model includes the effect of cracking and creep, as well as all permanent actions and prestressing. It allows the calculation of structures composed of an assembly of thin walls, as for instance in box-girder bridges.

The comparison between the results obtained and theoretical and experimental results confirm the validity of the model. It was subsequently applied to case studies, to investigate some aspects of the behavior of thin walls structures. A first series of calculations deals with the relationship between the amount of prestressing of a box-girder bridge with three spans, looking especially at shear deformations. The other two deal with a RC simple supported beam and a RC deep beam, investigating serviceability behavior of structures designed using ultimate limit state criteria. The question of the stresses in the reinforcement bars is discussed in detail.

These numerical case studies highlight the importance of the hypotheses made in the modeling of concrete structures, either using a computational tool such as developed here or simplified, more traditional methods. In addition, they lead to a discussion of commonly used detailing rules for the serviceability limit state of concrete thin walls structures.

Abréviations

Technique

LMC	Loi moment-courbure (sauf indication contraire, loi CEB-FIP)
LT	Loi du tirant
LTM	Loi du tirant modifiée (chap. 3)
LTM 2D	Loi du tirant modifiée pour le calcul de membranes (chap. 4)
MCFT	Modified Compression Field Theory (Vecchio & Collins [75])
STM	Softened Truss Model (Hsu [39])
RA-STM	Rotating Angle STM
FA-STM	Fixed Angle STM
EF, MEF	Eléments finis, méthode des éléments finis
CM90	Code Modèle 90 CEB-FIP [17]

Associations, groupements

SIA	Société des Ingénieurs et Architectes Suisses
CEB	Comité Euro-International du Béton
FIP	Fédération Internationale de la Précontrainte
ACI	American Concrete Institute

Table des matières

1 Introduction

Jusque dans les années 60, les structures étaient vérifiées à partir de contraintes admissibles permettant de garantir à la fois une sécurité structurale suffisante et un comportement en service satisfaisant. Puis des méthodes de calcul, visant une optimisation accrue du point de vue de la sécurité structurale et des coûts de réalisation, ont poussé de plus en plus loin la théorie de la plasticité, laissant de côté les questions d'aptitude au service et de durabilité. L'application stricte de cette démarche a parfois donné le jour à des ouvrages certes fiables, mais présentant un comportement insatisfaisant à l'état de service, et dont la maintenance s'avère très onéreuse à long terme.

Depuis lors, le bon fonctionnement au quotidien des ouvrages est devenu le souci permanent des constructeurs et des chercheurs. De fait, à l'heure actuelle les considérations d'aptitude au service et de durabilité ont passé au premier plan, devenant les critères déterminants pour le dimensionnement, reléguant le calcul à la rupture au rang de simple vérification – indispensable, certes, mais secondaire.

Partant de là, n'est plus à démontrer l'évidente nécessité de disposer d'outils de calcul adaptés, à même d'appréhender le comportement courant des ouvrages, soumis non plus à des charges pouvant provoquer leur effondrement, mais à toutes les actions qui les sollicitent chaque jour : trafic, intempéries, sels de déverglaçage, variations de température... Et qui plus est, des outils permettant de prévoir le comportement de ces ouvrages non seulement le lendemain de l'inauguration, mais aussi plusieurs années plus tard, afin d'éviter que leur pérennité ne soit remise en cause par suite de choix malheureux au moment de leur conception ou de leur réalisation.

Le domaine des structures en béton armé et précontraint est particulièrement riche. Leur forme peut être infiniment variée, allant de la simple poutre rectiligne à des éléments de béton massif, en passant par toutes les formes de poutres de l'espace, de dalles, de coque et de structures plissées. Non content de ce foisonnement de possibilités géométriques, les particularités des matériaux en présence et les multiples interactions qui résultent de leur combinaison requièrent souvent l'usage de modèles de calcul fort complexes.

Si les modèles utilisés pour le dimensionnement aux états limites ultimes peuvent se révéler relativement simples et pratiques dans leur mise en œuvre – à nouveau la théorie de la plasticité – les hypothèses impliquées peuvent être fort éloignées de celles régissant le comportement en service des structures. L'analyse réaliste de ce dernier passe par une analyse de plus en plus fine des différentes composantes du système considéré.

1.1 Premiers pas

Des modèles, d'abord très simples, puis de plus en plus élaborés ont donc été développés pour décrire le comportement du béton armé et précontraint à l'état de service. Ces modèles couvrent toute la gamme allant des lois globales bilinéaires, considérant un béton homogène ne travaillant qu'en compression, au béton numérique modélisant chaque granulat le constituant, et de la loi constitutive élémentaire des matériaux au modèle d'éléments finis représentant une structure dans sa totalité. Devant la complexité et la taille croissante des problèmes à résoudre, ainsi que la disponibilité chaque jour plus accrue de moyens informatiques puissants, les approches numériques sont de plus en plus répandues.

Les solutions informatiques sont maintenant monnaie courante, tant dans le domaine de la pratique que dans celui de la recherche. La modélisation par éléments finis du béton armé et précontraint est un sujet d'actualité et les modèles sont nombreux. Cependant, la plupart des modèles « évolués », permettant de prendre en compte de façon fiable des phénomènes complexes qui régissent le comportement du matériau béton armé, sont des modèles lourds d'utilisation, tant au niveau des données à fournir que de la manipulation des résultats obtenus. De plus, leur nature très détaillée les rend inapplicables au calcul d'un ouvrage dans son ensemble. Imaginez ce que peut représenter l'analyse exhaustive de chaque fissure d'un pont de 2 kilomètres de long... En fait, ce type de modèle est plutôt utilisé pour l'analyse de problèmes locaux.

Le sujet qui nous occupe plus particulièrement ici est le comportement global des ouvrages en béton armé et précontraint à l'état de service. L'aspect de durabilité mène naturellement à une analyse à long terme, donc essentiellement sous actions permanentes. Pour l'étude de ce domaine particulier, il faut un outil capable de reproduire à la fois les géométries très diverses rencontrées dans ce domaine et le comportement on ne peut plus capricieux des matériaux utilisés, tout en étant suffisamment « grossier » pour permettre l'analyse de systèmes de grande taille à des coûts raisonnables. C'est ce type de solution que le présent travail cherche à développer.

1.2 Définitions et concepts

1.2.1 Dalles, voiles et coques

Le terme ***coque*** possède de nombreuses définitions. Pour l'ingénieur constructeur, il s'agit généralement d'une structure spatiale mince, travaillant essentiellement comme une membrane, mais pouvant avoir des perturbations flexionnelles locales au droit des singularités, notamment les bords et les appuis. La géométrie présente généralement une

double courbure, ce qui lui confère une grande rigidité. Les structures de ce type qui viennent tout de suite à l'esprit sont les couvertures les plus diverses, ou les tours de refroidissement des centrales thermiques (fig. 1.1).

Figure 1.1: Exemples de structures de type "coque". Station service de Deitingen Sud sur l'autoroute A1 Berne-Zürich. Tour de refroidissement de la centrale nucléaire de Gösgen

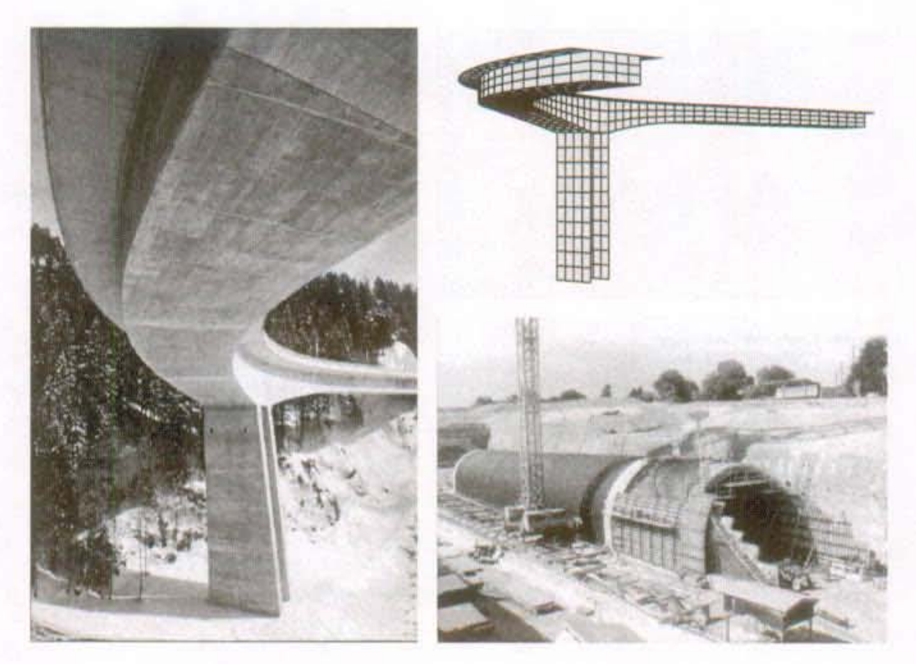


Figure 1.2: Exemple de structure pouvant être calculée par un modèle de type "coque". Pont sur la Barboleusaz (VD). Tranchée couverte à Sempach sur l'autoroute Olten-Lucerne.

Du point de vue du calcul statique et plus particulièrement de la méthode des éléments finis, la définition d'une coque est beaucoup plus générale. Il s'agit d'un élément structural bidimensionnel pouvant travailler à la fois en flexion et en membrane, et dont la géométrie peut être courbe dans l'espace. Cette définition englobe bien sûr celle donnée au début de ce paragraphe, mais elle s'applique aussi à toutes les structures composées d'éléments bidimensionnels. C'est à ce concept que se rattache le terme coque utilisé tout au long de ce travail.

Certains cas particuliers présentent des caractéristiques qui font qu'il est inutile de les calculer comme une coque, même si la solution apportée par un tel calcul est techniquement correcte. Ainsi, les plaques ou dalles et les membranes ou voiles ne sont rien d'autre que des cas particuliers de coques dont l'une ou l'autre composante du comportement peut être négligée. Les **dalles** ne travaillent qu'en flexion, tandis que les **voiles** ne reprennent que des efforts membranaires.

Les **coques** sont des éléments bidimensionnels **courbes**, alliant ces deux comportements flexionnel et membranaire. Un élément structural sollicité à la fois de manière flexionnelle et membranaire et présentant une courbure hors plan ne peut être représenté autrement que par un élément de coque, ce qui arrive relativement fréquemment dans les ouvrages d'art. Citons pour exemple un pont caisson courbe comme celui qui est représenté à la figure 1.2, dont les âmes correspondent précisément à la définition d'une coque, même si la structure dans son ensemble n'a *a priori* pas grand chose à voir avec une coque. Ainsi, pour analyser le comportement de bon nombre de structures composées de parois minces, une modélisation en coque est sans aucun doute la mieux adaptée.

1.2.2 Modélisation en barre, modélisation en coque

Pour des structures de type coque ou des structures plissées (sheds), le recours à une modélisation en coque est souvent la meilleure, sinon la seule solution. L'alternative que constitue un calcul en *grille de poutres* est généralement plus coûteuse, tant au niveau de la préparation des données que de l'utilisation des résultats de calcul. Par contre, certains types de structures peuvent être modélisés en barres ou en coque, la nature des résultats désirés dictant le choix du modèle. A nouveau, le calcul d'un pont poutre est l'exemple type de cette situation.

Une modélisation en barres permet essentiellement de reproduire le comportement global de l'ouvrage. La géométrie de la structure est définie par les axes des éléments structuraux auxquels sont attribuées leurs sections. Les résultats obtenus sont globaux : déplacements et rotations de l'axe des barres, moments de flexion, effort normal, efforts tranchants, moment de torsion. Les lois de comportement impliquées lient les efforts intérieurs à des déformations généralisées du même ordre (courbures, dilatation, glissements moyens). De ce fait, ce type d'approche est adapté pour l'analyse du comportement global longitudinal de l'ouvrage, ainsi que pour son dimensionnement d'ensemble.

Dans une modélisation en coque, les parois minces composant la structure sont modélisées en tant que telles. Cela permet une grand liberté dans la géométrie de la structure. Ce type de modèle permet également d'obtenir le comportement global de la structure en ce qui concerne les déplacements. De plus, le comportement transversal (flexion transversale du tablier) est

automatiquement traité, de même que la diffusion des efforts dans les zones d'introduction de forces. Ainsi, pour tout ce qui concerne les déplacements, ce modèle permet une analyse aussi bien globale que locale (par rapport à la section du pont, et non pas par rapport au matériau). Par contre, les efforts globaux de section ne sont pas directement disponibles. Les efforts locaux membranaires et flexionnels correspondent plutôt, à l'échelle de la structure, à des contraintes. Ces efforts peuvent être utilisés pour le dimensionnement transversal, mais ne sont pas aussi facilement exploitables pour le dimensionnement longitudinal d'ensemble.

On voit donc bien la complémentarité de ces deux types de modélisations pour l'analyse des ouvrages d'art. Dans le contexte d'une analyse non linéaire à l'état de service – qui est précisément le centre de ce travail – d'autres points viennent se greffer sur les aspects susmentionnés.

Dans une modélisation en barres, le fait que des variables globales (flèche, rotations de la section, courbures) soient utilisées rend délicat le traitement des non linéarités matérielles, et tout particulièrement celui des interactions entre les différents efforts globaux (M,N,V,T).

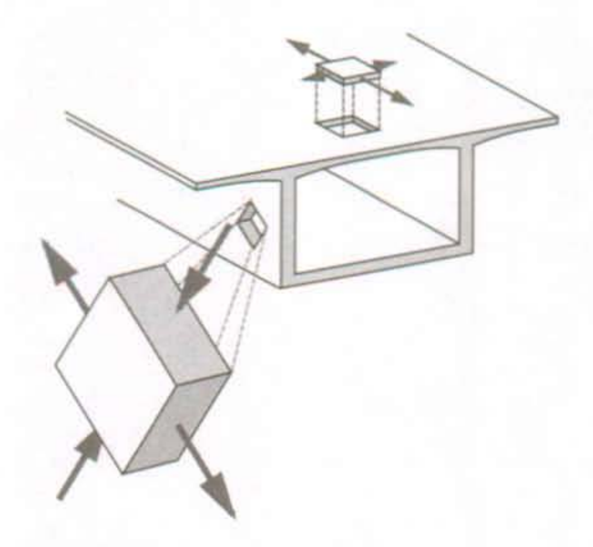


Figure 1.3: Contraintes membranaires dans un pont caisson

Le calcul en coque simplifie considérablement la question. Dans le cas des ponts, le comportement global de la structure se résume essentiellement à des contraintes membranaires dans les différents panneaux constituant la structure (fig. 1.3). Dans ce contexte, un modèle de comportement unique traitant les voiles en béton armé suffit à décrire toutes les situations. De plus, ce modèle étant destiné, rappelons-le encore une fois, à l'étude de l'état de service, l'absence de résultats globaux tels que le moment de flexion de la section complète n'est pas un handicap.

1.3 Démarche adoptée

Afin d'aboutir à l'outil de calcul décrit au début de cette introduction, si possible sous une forme accessible aux praticiens, le choix s'est porté sur l'utilisation conjointe d'un code de calcul[1] par éléments finis de coque et d'une loi de comportement globale. Le premier permet une modélisation aisée de la géométrie complexe des structures à parois minces les plus diverses. La seconde fournit directement la déformation moyenne d'une section en béton armé ou précontraint soumise à un effort normal.

Le chapitre 2 fournit un état des connaissances actuelles dans le domaine de la modélisation numérique des structures en béton à l'état de service.

Dans le chapitre 3, la Loi du Tirant Modifiée, ou LTM, est établie sur la base d'une loi similaire existante. Ce modèle est utilisé comme loi constitutive dans un calcul de section en flexion composée, à titre de validation.

Dans le chapitre 4, la LTM unidimensionnelle est étendue au calcul d'éléments bidimensionnels et ainsi transformée en une loi de comportement de membrane en béton armé. Elle est implémentée dans un code d'éléments finis et confrontée à des résultats expérimentaux.

Le chapitre 5 présente une série d'exemples d'application numérique du code de calcul non linéaire développé au chapitre précédent. Il s'agit d'un pont caisson précontraint, d'une poutre en béton armé et d'une paroi porteuse en béton armé. Des enseignements concernant le *dimensionnement à l'état de service* en sont tirés.

Les conclusions de ce travail ainsi que certaines recommandations, concernant tant le calcul et la modélisation des structures en béton à parois minces que leur dimensionnement, forment le contenu du chapitre 6.

[1] logiciel

2 Etat des connaissances

2.1 Introduction

De quasi inexistant il y a un demi-siècle, le domaine de l'aptitude au service des structures a petit à petit fait son chemin, pour finir par devenir au moins aussi important que celui de la sécurité structurale. Il est particulièrement d'actualité, dans le milieu de la pratique comme dans celui de la recherche. Contrairement au calcul à la rupture où la plasticité autorise une grande liberté dans les modèles de calcul, le comportement des matériaux à l'état de service met en jeu des lois constitutives et des interactions pouvant être fort complexes.

L'objectif principal recherché dans ce travail est le développement et l'application d'un outil de calcul pour le comportement en service à long terme des structures en béton à parois minces. Aussi, dans ce chapitre, il est attaché plus d'importance à la modélisation des différents phénomènes liés au comportement des structures en béton qu'aux phénomènes eux-mêmes. De plus, l'ensemble des éléments présentés doivent être compris comme destinés à l'étude de l'état de service des structures. Certains des modèles décrits ici ont été développés essentiellement dans une optique de calcul à la rupture, et leur présence s'explique par le bon comportement à l'état de service qu'ils ont montré malgré tout.

2.2 Béton et béton armé

Le béton est déjà à lui seul un matériau fort complexe. Par sa nature, un mélange de granulats de tailles différentes, de liant et d'air, il est hétérogène. On le considère néanmoins généralement comme un matériau homogène, du moins pour tout ce qui touche à l'analyse des structures. L'hétérogénéité se manifeste également à un autre niveau : la fissuration engendre des discontinuités locales et une réponse anisotrope. De plus, du fait de sa mauvaise résistance à la traction, le béton est rarement utilisé seul. Les armatures qui y sont associées sont des éléments discrets et linéaires, ce qui accentue encore l'hétérogénéité et l'anisotropie du matériau béton armé ou précontraint. Enfin, les interactions entre le béton et les armatures sont des phénomènes complexes.

Cependant, selon le niveau de l'étude réalisée, et donc l'échelle de la modélisation utilisée, l'hétérogénéité du béton armé fissuré peut être traitée par l'utilisation d'un modèle de comportement moyen homogène. L'anisotropie, en revanche, ne peut pas être ignorée. Il est

clair qu'une pièce de béton armé est moins rigide si elle est fissurée que si elle ne l'est pas. La rigidité apparente est donc plus grande dans la direction parallèle aux fissures que dans la direction perpendiculaire.

Le comportement d'une section en béton armé ou précontraint est un problème hautement hyperstatique. Le simple fait que le béton et l'acier ont des modules d'élasticité différents suffit à faire apparaître ce phénomène. Le fluage et la fissuration renforcent encore cet état de choses. Par exemple, pour une section en BA soumise à un effort normal de compression, le fluage engendre un changement de répartition de l'effort entre l'armature et le béton.

2.2.1 Fissuration

Du point de vue du comportement global d'une structure, l'aspect essentiel de la fissuration du béton à l'état de service est avant tout le fait qu'elle provoque des pertes locales de rigidité, entraînant au niveau de la structure des augmentations des déformations et des redistributions de contraintes. Le comportement d'un tirant en béton armé ne se résume pas à une phase élastique linéaire pour le stade non fissuré et au passage brusque au stade II-nu où seule l'armature contribue à la rigidité (fig. 2.1a). Bien au contraire, une fissure est capable, dans une certaine mesure, de transmettre des contraintes, et la participation du béton tendu entre les fissures n'est pas négligeable (fig. 2.1b).

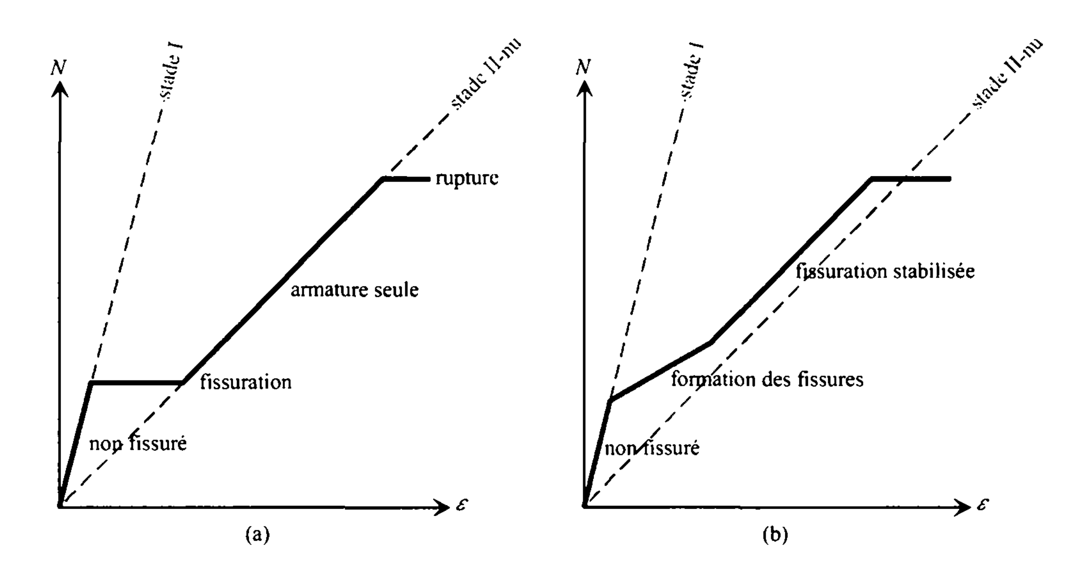


Figure 2.1: Comportement idéalisé d'un tirant en BA (a) sans participation du béton après fissuration (b) avec participation du béton

Du fait de la nature hétérogène du béton, les bords d'une fissure ne sont pas des surfaces lisses. L'enchevêtrement des granulats et de la pâte de ciment permet la transmission de traction et de cisaillement, même si le béton est fissuré.

Sujet de prédilection de la mécanique de la rupture, la transmission de traction à travers une zone fissurée est connue sous le nom de comportement iso-adoucissant ou « softening » (fig. 2.2a). Le *modèle de la fissure fictive* d'Hillerborg [38] permet de représenter l'endommagement progressif de la zone de rupture par une ouverture de fissure équivalente *w* et en y associant une loi contrainte-ouverture (fig. 2.2b).

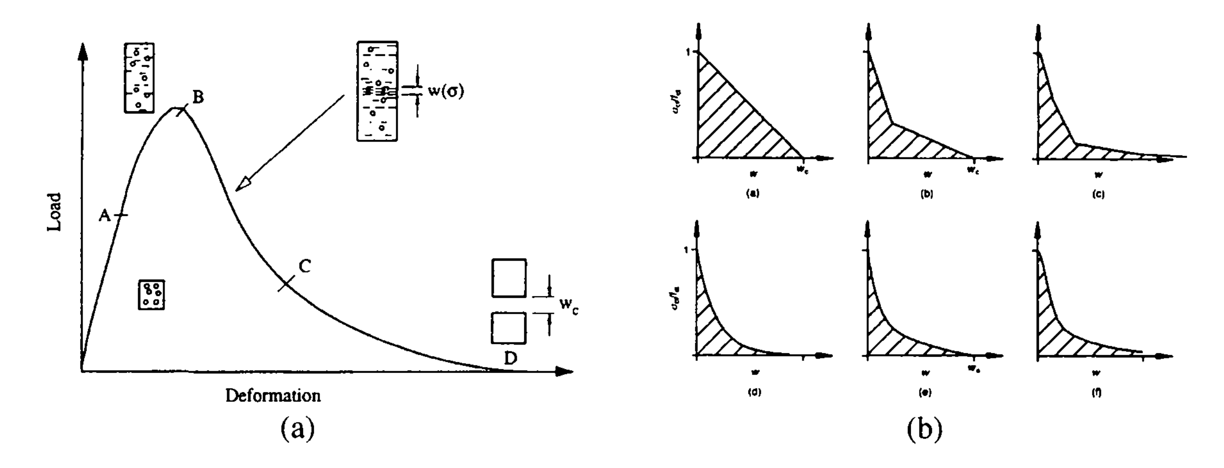


Figure 2.2: (a) Diagramme charge-déformation d'une éprouvette en traction [44]
(b) Différentes formes de lois de softening [15]

La transmission de cisaillement à travers une fissure s'explique par la rugosité des faces de la fissure entravant leur glissement relatif (fig. 2.3). La capacité de transmission de cisaillement d'une fissure dépend essentiellement de l'ouverture de la fissure et de la taille maximale des granulats (notamment Walraven [78,77]).

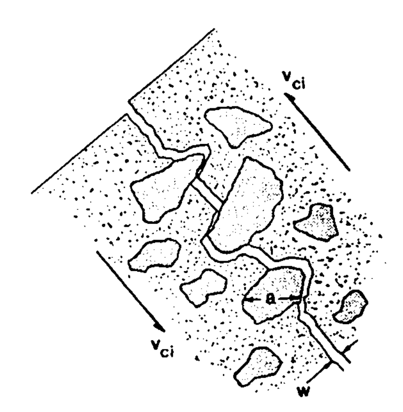


Figure 2.3: Transmission de cisaillement à travers une fissure par engrènement des granulats (d'après [75])

Mentionnons enfin le fait que, sous chargement de longue durée, le béton peut se rompre sous une sollicitation de traction inférieure à sa résistance à la traction à court terme. Des réductions de la résistance à la traction d'un facteur pouvant aller de 0.6 (Shkoukani & Walraven [66]) à 0.7 (Al-Kubaisi & Young [4], fig. 2.4) ont été observées. Ce comportement est connu sous le nom de *fatigue statique*.

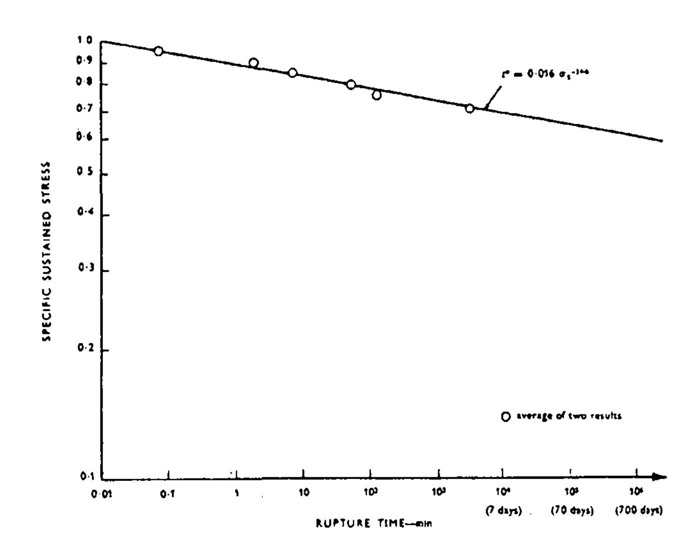


Figure 2.4: Diagramme durée de chargement – contrainte de rupture en échelle log-log [4]

Si les comportements mentionnés ci-avant sont fondamentaux pour l'étude du béton seul, il en est un encore plus important en présence d'armatures. La figure 2.5 montre les variations de l'état de contraintes le long d'un tirant en BA. Ces variations sont dues à l'adhérence acier-béton qui introduit un effort de traction dans le béton. La participation du béton ainsi tendu entre les fissures à la rigidité du tirant peut être importante et ne peut pas être négligée (fig. 2.1b).

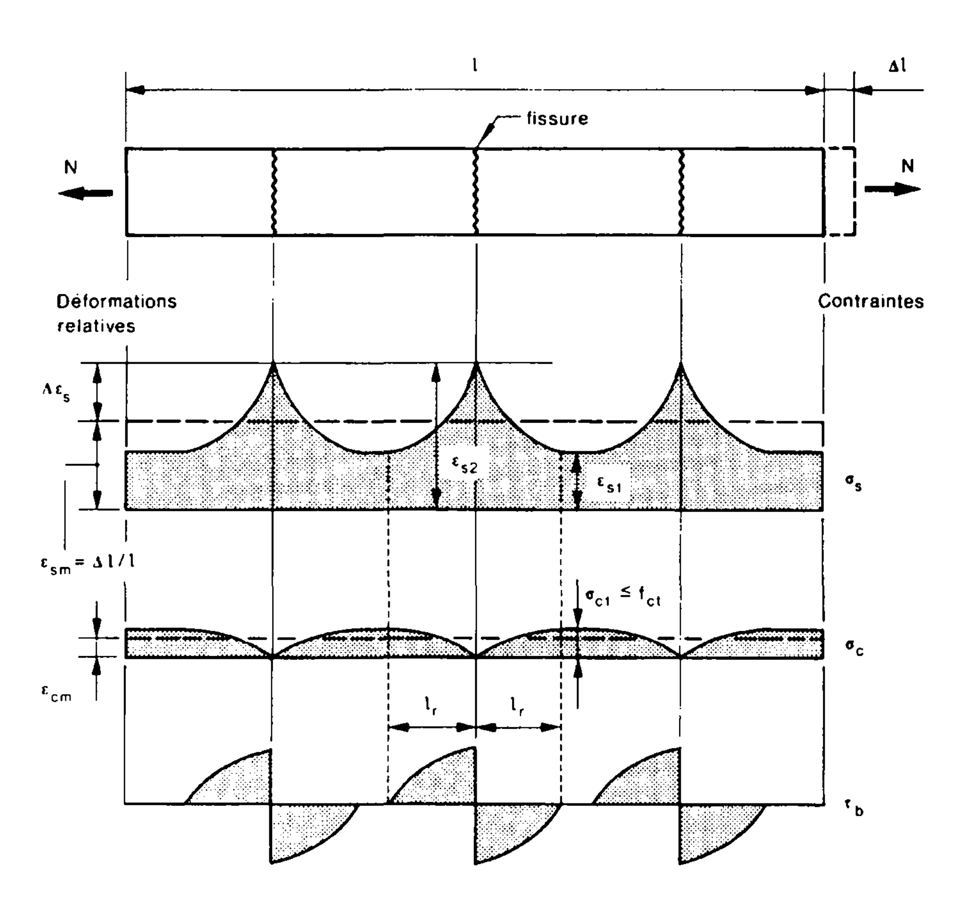


Figure 2.5: Variation de l'allongement et des contraintes le long d'un tirant en BA fissuré [29]

Les armatures peuvent également transmettre un effort de cisaillement à travers la fissure, par un effort axial, si les barres ne sont pas perpendiculaires à la fissuration, et par flexion locale des barres (dowel effect, fig. 2.6).

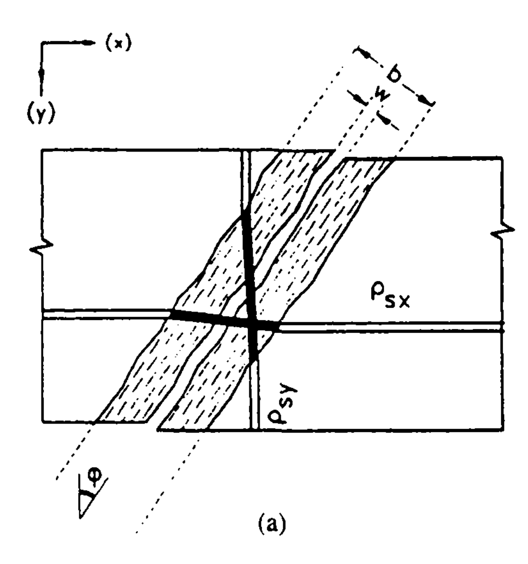


Figure 2.6: Flexion locale des barres d'armature au droit d'une fissure [82]

La modélisation des différents phénomènes mentionnés ici a donné lieu à des formulations très variées. Etant donné la complexité des comportements mis en jeu, nombre de ces formulations sont avant tout destinées à des applications numériques. C'est sur cet aspect que l'accent est mis dans les pages suivantes.

Les modèles de calcul de fissuration peuvent être rangés dans deux grandes familles : les modèles locaux et les modèles globaux. Les premiers sont basés sur une représentation explicite des composants du béton armé. Chaque fissure est modélisée, ainsi que les interactions entre le béton et chaque barre d'armature. Les modèles globaux, au contraire, considèrent le béton armé comme un matériau homogène, y compris dans sa phase fissurée. Ils lient à l'effort transmis une déformation moyenne de la zone fissurée, et ce au moyen de lois de formulation simplifiée.

2.2.1.1 Modèles locaux

Le principe de ce type de modèle est de représenter explicitement les différents matériaux et leurs interactions. Chaque fissure est effectivement calculée, de même que le comportement du béton entre les fissures, les variations de contraintes dans les armatures et l'adhérence acier-béton. Ainsi, les lois constitutives utilisées sont généralement celles qui figurent au tableau 2.1.

Tableau 2.1: Lois constitutives pour un modèle local de fissuration

Matériau, localisation	Variables liées
Béton non fissuré	Contrainte – dilatation
Acier d'armature	Contrainte – dilatation
Béton au droit de la fissure (softening)	Contrainte de traction transmise à travers la fissure – ouverture de la fissure
Béton au droit de la fissure (aggregate interlock)	Contrainte de cisaillement transmise à travers la fissure – glissement des lèvres de la fissure
Armatures au droit de la fissure (dowel effect)	Contrainte de cisaillement transmise à travers la fissure – glissement des lèvres de la fissure
Adhérence acier-béton	Contrainte d'adhérence – glissement

Implémentation directe dans un modèle EF

Ce type de modèle peut être utilisé de deux manières différentes. Une première possibilité est l'implémentation directe de ces lois constitutives dans un modèle d'éléments finis dans lequel chaque matériau est discrétisé séparément, et chacune des lois constitutives mentionnées au tableau 2.1 est utilisée explicitement. Au niveau des éléments finis, les fissures peuvent être modélisées de différentes manières (fig. 2.7) : les modèles de fissuration discrète et les modèles d'endommagement ou *smeared crack.*

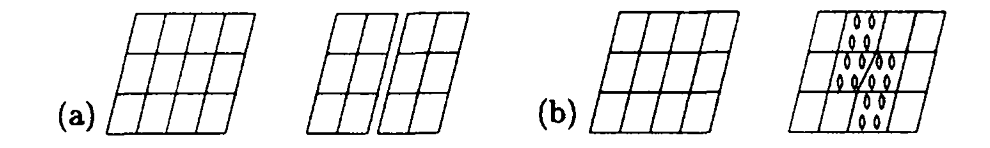


Figure 2.7: (a) modèle de fissuration discrète (b) modèle d'endommagement ou smeared crack

Les premiers modélisent effectivement les discontinuités du béton, la représentation du comportement de la fissure pouvant être assuré par un élément spécial de contact. Dans les modèles d'endommagement, la représentation d'une fissure se fait par la superposition de deux champs de déformations : celui des déformations élastiques linéaires, et un champ de déformations représentant l'endommagement de la zone de rupture et l'ouverture de la fissure. Ainsi il n'y a pas de discontinuité dans le réseau d'éléments finis. La modélisation locale de la fissuration nécessite dans tous les cas l'utilisation d'un maillage très dense dans les zones fissurées, de façon à permettre leur formation et leur propagation (fig. 2.8).

Les détails concernant l'implémentation de la fissuration et les problèmes de localisation de l'endommagement ne sont pas abordés ici. Pour plus de précisions, on pourra se reporter à l'abondante littérature sur le sujet (notamment Bazant [7,8], Ozbolt [57] ou plus général Bathe [5], Jirásek [43]).

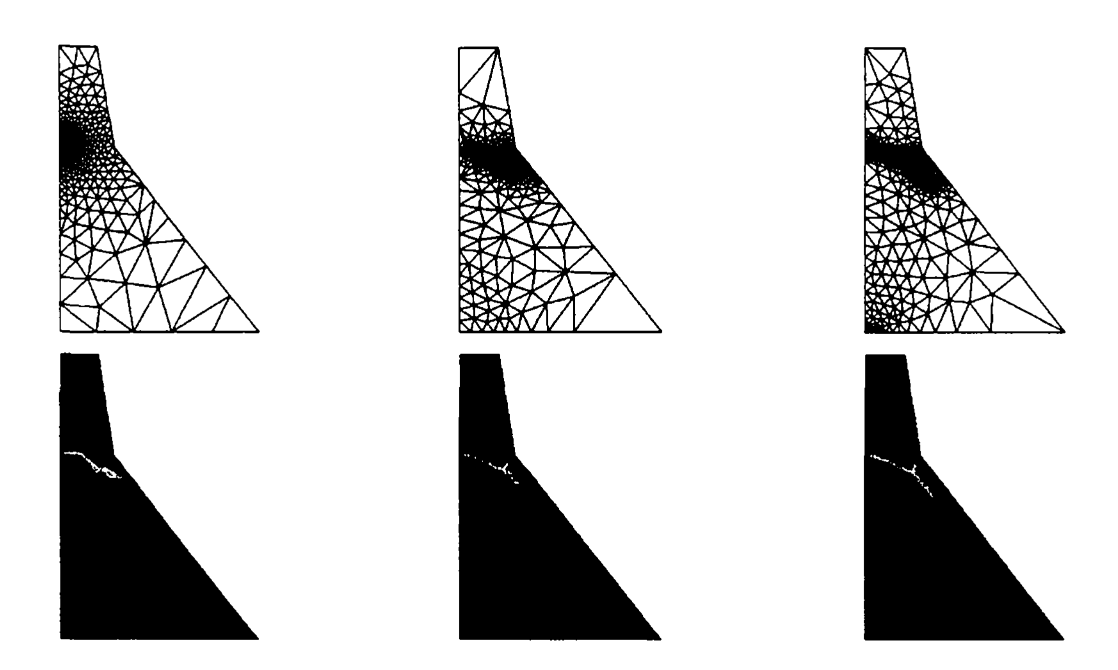


Figure 2.8: Maillage adaptatif et propagation de la zone de rupture dans un barrage poids [43]

Utilisation dans un modèle restreint

Dans la recherche, l'utilisation des lois constitutives fondamentales est abondamment mise en œuvre pour simuler de façon très complète des éléments structuraux simples, tels qu'un tronçon de poutre fléchie (Rotilio [63]), de tirant précontraint (Laurencet [49], Marti et al. [53]), ou encore de membrane (Hsu [39, 40, 41], Kaufmann et Marti [45], Vecchio et Collins [75]). Ces modèles font la plupart du temps intervenir de nouvelles lois de comportement, dans un but de calibration ou d'étude paramétrique, mais ne nécessitent généralement pas l'utilisation de la méthode des éléments finis. Les équations qui en découlent peuvent souvent être résolues par des méthodes numériques plus simples, telles que celle des différences finies ou des processus itératifs, voir analytiquement, moyennant certaines simplifications.

Dans cette direction, on trouve notamment le Tension Chord Model (Marti et al. [53]) qui est destiné à modéliser le comportement d'un tirant en béton armé ou précontraint sur la base des lois constitutives de l'acier, du béton, de l'adhérence et du comportement des fissures.

Partant de là, il est également possible d'utiliser ce type d'approche pour analyser le comportement d'une *tranche unitaire* de béton armé, par exemple sur une largeur correspondant à l'écartement des fissures, et d'utiliser les résultats obtenus comme loi constitutive de la tranche en question (voir § 2.2.1.3). L'implémentation d'une telle loi – complexe, il est vrai – dans un modèle d'éléments finis doit ainsi permettre d'étudier le comportement global d'une structure sur la base de lois constitutives de très bas niveau. Ce type de modèle ne peut toutefois plus être considéré comme un modèle local, dans la mesure où ce ne sont plus les fissures qui sont localisées, mais les *zones fissurées*. De ce point de vue,

il s'agit d'un modèle global. Certains modèles de ce type seront repris plus loin dans la partie concernant la modélisation d'éléments bidimensionnels (membranes).

Commentaires

L'implémentation directe des lois constitutives de base dans un modèle d'éléments finis est particulièrement adaptée pour l'analyse approfondie de détails compliqués n'autorisant pas de simplifications, dans la mesure où la méthode n'impose *a priori* pas de limitations géométriques. Néanmoins, l'utilisation de ce type de modèle est assez lourde et ne se justifie que pour des études très locales.

L'approche qui consiste à créer une loi constitutive du béton armé par l'assemblage de lois constitutives de bas niveau est à première vue plus simple et économique. Il faut cependant remarquer que les données à saisir sont exactement les mêmes que dans le cas précédent – dans la mesure où les lois constitutives utilisées sont les mêmes – et que la complexité des résultats obtenus est du même niveau. Du point de vue du coût de calcul, l'assemblage des lois constitutives étant réalisé au niveau d'un modèle de comportement local plutôt qu'au niveau du calcul par éléments finis lui-même, une économie est réalisée sur le calcul par éléments finis. Par contre, l'évaluation du modèle de comportement local requiert généralement des processus itératifs non-linéaires. Il n'est donc pas évident de déterminer si un tel modèle est plus économique qu'un modèle local de fissuration.

Il n'en reste pas moins que, dans la mesure où c'est une analyse globale du comportement d'un ouvrage qui est visée, des résultats aussi détaillés que ceux fournis par les méthodes décrites ci-avant ne sont pas indispensables. Dans la même optique, il serait souhaitable de réduire les données à saisir au strict nécessaire.

2.2.1.2 Modèles globaux

A l'opposé des modèles de très bas niveau nécessitant, sinon une informatique puissante, des calculs relativement complexes, les normes et codes destinés aux ingénieurs proposent des modèles globaux qui permettent de calculer de façon relativement simple le comportement moyen d'une section en béton armé ou précontraint avec prise en compte de la fissuration. Ces modèles sont plus ou moins empiriques et ont été calibrés sur la base de résultats expérimentaux.

Qu'il s'agisse de modèles de tirant ou de flexion, le principe de base reste toujours le même. Une relation est établie entre un effort transmis et la valeur moyenne d'une déformation généralisée sur un tronçon de l'élément considéré. Tant que l'élément n'est pas fissuré, la déformation est constante le long de l'élément et égale à sa valeur calculée en stade I. Si

l'élément est fissuré, la déformation varie le long de l'élément entre les valeurs en stade I et en stade II-nu (fig. 2.5), de même que l'état de contrainte de la section. La relation globale fournit une valeur moyenne de cette déformation.

2.2.1.2.1 Modèles de tirant

De nombreux modèles de tirant ont été proposés par différents auteurs (CEB [26] Van der Veen [74] Code Modèle 90 [17] Bruggeling [13] Sippel [16,69] Farra [25]). Leur allure générale se présente la plupart du temps sous la forme d'une loi multi-linéaire, du moins pour les modèles les plus récents. Les quatre segments qui composent la loi sont (fig. 2.9) : stade non fissuré ou stade I, stade de formation des fissures, pendant lequel les fissures apparaissent, stade de fissuration stabilisée[1], pendant lequel il n'y plus de formation de nouvelle fissure, et le stade de rupture, qui correspond à la plastification des armatures.

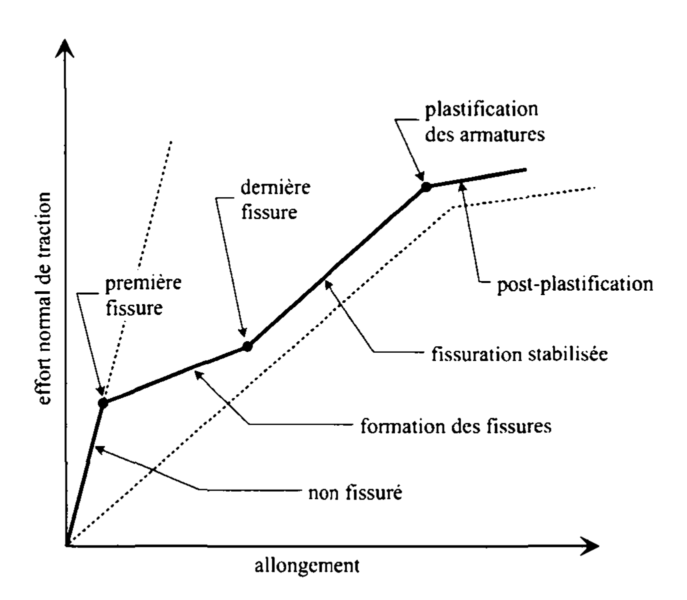


Figure 2.9: Allure générale d'un modèle de tirant

Si la plupart des modèles de tirant ont cette allure, des différences apparaissent d'une formulation à l'autre dans la définition des points caractérisant l'apparition de la première fissure et la stabilisation de la fissuration.

Il n'est pas utile de présenter ici en détail chacune de ces formulations (pour plus de détail, voir l'état des connaissances rédigé par Farra [25]). Nous ne retiendrons ici que les formulations proposées par le Code Modèle 90 [17] et Sippel [16], dont est inspiré la LTM (Loi du Tirant Modifiée) décrite au chapitre 3. La figure 2.10 correspond aux deux formulations. Les seules différences interviennent dans la définition des valeurs de N_{sr1} et N_{srn}.

[1] La terminologie anglo-saxonne, *final crack pattern*, décrit mieux cette phase

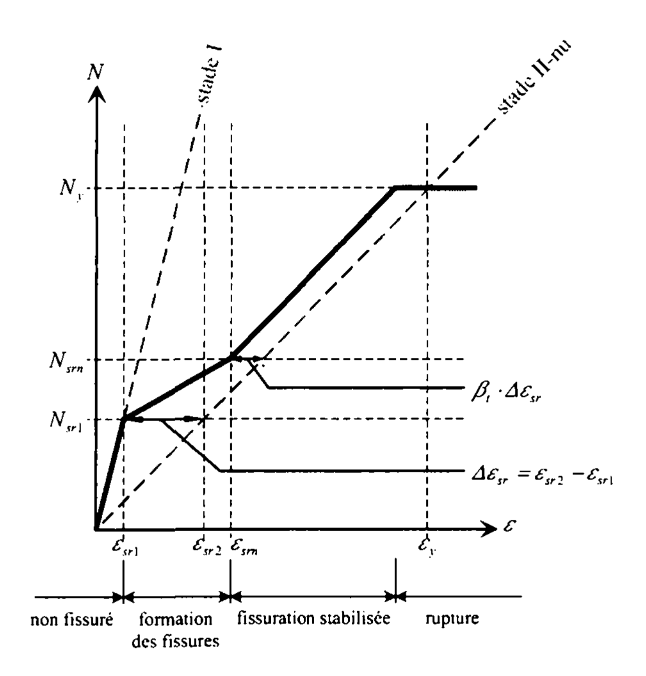


Figure 2.10: Lois du tirant CEB-FIP et Sippel

Définition des valeurs caractéristiques selon le Code Modèle 90 CEB-FIP

$$N_{sr1} = A_c(1+(\alpha-1)\rho)f_{ct} \tag{2.1}$$

$$N_{srn} = 1.3 \cdot N_{sr1} \tag{2.2}$$

$$N_y = A_s \cdot f_y = A_c \cdot \rho \cdot f_y \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_{sr1} = N_{sr1} / E_c A_c (1+(\alpha-1)\rho) \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_{sr2} = N_{sr1} / E_s A_c \rho \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_{srn} = \varepsilon_{sr2} \cdot N_{srn} / N_{sr1} - \beta_t (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}) \tag{2.6}$$

$$\beta_t = \begin{cases} 0.4 & \text{sous sollicitation de courte durée} \\ 0.25 & \text{sous sollicitation de longue durée} \end{cases} \tag{2.7}$$

où Ac est l'aire de béton brute, α le coefficient de transformation élastique acier-béton, ρ le taux d'armature. N_{sr1} et N_{srn} correspondent à l'apparition de la première respectivement de la dernière fissure et délimitent le stade de formation des fissures. N_y est l'effort de plastification des armatures. La participation du béton tendu en stade de fissuration stabilisée est définie comme une fraction β_t de la différence d'allongement entre le stade I et le stade II-nu au moment de l'apparition de la première fissure. Elle varie linéairement de 1 à β_t pendant la phase de formation des fissures.

Les valeurs du module d'élasticité du béton E_c et du coefficient de transformation α doivent être ajustées, le cas échéant, pour tenir compte du fluage (voir § 2.2.2). D'après les remarques fournies dans le CM90, la valeur de la résistance à la traction f_{ct} pour les calculs dépend du type de résultats recherchés. Les valeurs préconisées sont :

- calcul de déformations : valeur moyenne ou fractile inférieur
- dimensionnement d'armatures minimales : fractile supérieur
- vérification de stabilité : valeur moyenne
- calcul d'ouverture de fissures : valeur moyenne

Définition des valeurs caractéristiques selon Sippel [16]

Les seules différences de formulation interviennent dans la définition des bornes de la phase de formation des fissures. Les équations 2.1 et 2.2 sont remplacées par

$$N_{sr1} = A_c(1+(\alpha-1)\rho)\cdot k \cdot f_{ct,fl5\%} \quad (2.8)$$

$$N_{sm} = A_c(1+(\alpha-1)\rho)\cdot k \cdot f_{ct,fl95\%} \quad (2.9)$$

$$f_{ct,fl5\%} = 0.75 \cdot f_{ct,fl} \quad (2.10)$$

$$f_{ct,fl95\%} = 1.25 \cdot f_{ct,fl} \quad (2.11)$$

$$k = \frac{13.63 - \log_{10} t}{14.46} \not< 0.5 \quad (t \text{ donné en secondes}) \quad (2.12)$$

$f_{ct,fl}$ est la résistance à la traction du béton en flexion. Ceci tient au fait que le modèle proposé par Sippel est avant tout destiné à des calculs de déformations en flexion. Les bornes inférieure et supérieure de la phase de formation des fissures sont déterminées comme étant les fractiles 5% et 95% de la résistance à la traction. Un calcul simplifié, avec un coefficient de variation de 15%, donne les relations 2.10 et 2.11.

Le coefficient k introduit l'effet de la durée de chargement sous la forme d'une réduction de la résistance à la traction pour des charges de longue durée. L'équation 2.12 a été proposée par Reinhardt et Cornelissen [61] sur la base de résultats expérimentaux. D'autres formulations existent (notamment Shkoukani et Walraven [66]), mais il s'agit toujours de lois logarithmiques avec des coefficients très semblables. Une constatation générale de tous les auteurs est l'absence de rupture au-delà d'une durée de chargement d'environ 9 mois, ce qui correspond à l'introduction d'une borne inférieure à la définition de k. Contrairement aux coefficients de l'expression de k, la valeur de cette borne varie passablement d'une formulation à l'autre. Elle va de 0.5 pour la formulation ci-dessus jusqu'à 0.7 dans le cas d'Al-Kubaisi et Young [4].

Dans tous les cas, la valeur de k chute rapidement au début, et la borne inférieure est atteinte pour des durées de chargement allant de 1 à 9 mois. Ainsi, pour des calculs à long terme, correspondant à plusieurs années de chargement, c'est forcément la valeur plancher qui devra être utilisée.

Commentaires

La formulation de Sippel introduit deux aspects supplémentaires par rapport à la formulation standard CEB-FIP. Le modèle étant décrit comme destiné à des calculs flexionnels, la résistance à la traction utilisée tient compte d'un éventuel effet d'échelle dû au softening pour des éléments fléchis de faible hauteur (dalles). De plus, il introduit le phénomène de fatigue statique sous la forme d'une réduction de la résistance à la traction du béton.

Par contre, aucun de ces deux modèles ne tient d'effets de taille dus à une grande épaisseur transversale ou à la disposition des barres d'armatures. Cette dernière peut en effet avoir une influence sur la participation du béton tendu (Clark [19], Braam [12]).

2.2.1.2.2 Lois moment-courbure

L'approche est la même que pour la loi du tirant, dans le sens où la relation donne la courbure moyenne d'un tronçon de poutre soumis à un moment de flexion et un effort normal. Cette valeur moyenne de la courbure est établie à partir des courbures calculées en stade I et II-nu. Ce type de loi s'applique à des sections présentant un axe de symétrie vertical.

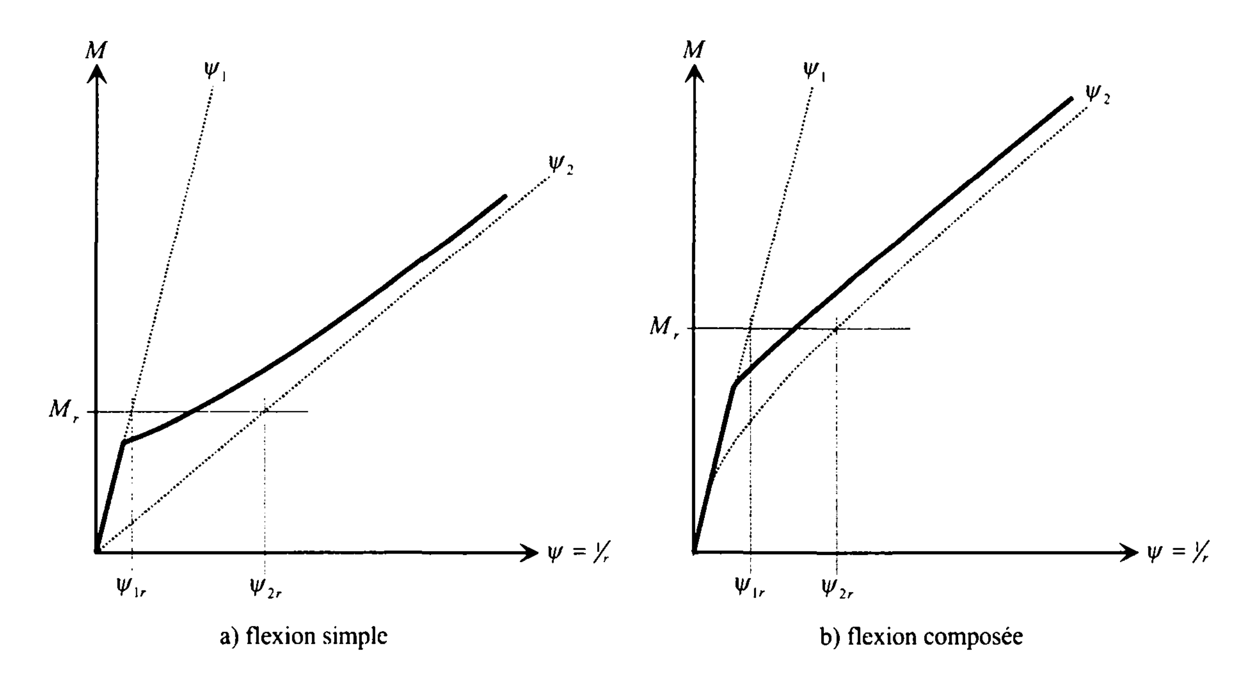


Figure 2.11: Loi moment-courbure CEB-FIP

La loi moment-courbure CEB-FIP (CM90 [17], fig. 2.11) est définie comme suit :

$$\psi_m = \psi_2 - \beta \cdot (\psi_{2r} - \psi_{1r}) \cdot \frac{M_r}{M} \geq \psi_1 \qquad (2.13)$$

avec ψ_m courbure moyenne du tronçon considéré

ψ_1 courbure en stade I sous M,N

ψ_2 courbure en stade II-nu sous moment M,N

ψ_{1r} courbure en stade I sous moment M_r,N

ψ_{2r} courbure en stade II-nu sous moment M_r,N

β coefficient de participation du béton tendu

$\beta = 0.8$ pour la 1ère mise en charge

$\beta = 0.5$ pour le long terme

M moment appliqué

N effort normal appliqué

M_r moment de fissuration de la section sous N

Si la loi moment-courbure suit les mêmes principes de base que la loi du tirant, il faut souligner qu'elle a bénéficié de nettement moins de travaux expérimentaux, du simple fait que de tels essais nécessitent des équipements plus lourds. Cet état de choses, combiné au fait que les comportements intervenant dans la flexion sont plus complexes, font de la loi du tirant en général un instrument plus fiable que la loi moment-courbure pour l'évaluation du comportement du béton armé fissuré.

La loi moment-courbure reste cependant un outil simple et efficace pour le calcul des déformations des structures de type poutre à plan de symétrie vertical. Il faut toutefois mentionner certaines limitations inhérentes à la nature même du modèle, ou plus exactement à sa formulation :

- pas de prise en compte de sections asymétriques, ce qui impliquerait une flexion bi-axiale ; il n'est donc pas possible de traiter, par exemple, une section de pont présentant un dévers
- pas de prise en compte des effets de cisaillement : effort tranchant, torsion, *shear lag* ; ce dernier peut toutefois être traité de façon approchée sous la forme d'une largeur effective pour les éléments concernés (tablier de pont sur appui)

2.2.1.3 Cisaillement et modèles de membrane

Pour les calculs à l'état de service, dans le domaine de la pratique, les phénomènes liés au cisaillement sont généralement traités de façon simplifiée, voire omis. On utilise souvent les résultats d'une analyse linéaire pour vérifier contraintes et déplacements. Pour les vérifications de sécurité structurale, les modèles de treillis sont les plus courants.

Dans une structure en béton à parois minces, le cisaillement inclut les effets d'effort tranchant, de torsion, et le *shear lag*, qui intervient notamment dans la détermination de la

largeur participante (ou largeur efficace). En fait, tout ce qui se rapporte de près ou de loin à l'introduction de forces dans un élément de structure fait apparaître des zones de déviation des efforts – ou des contraintes – et donc un cisaillement membranaire local.

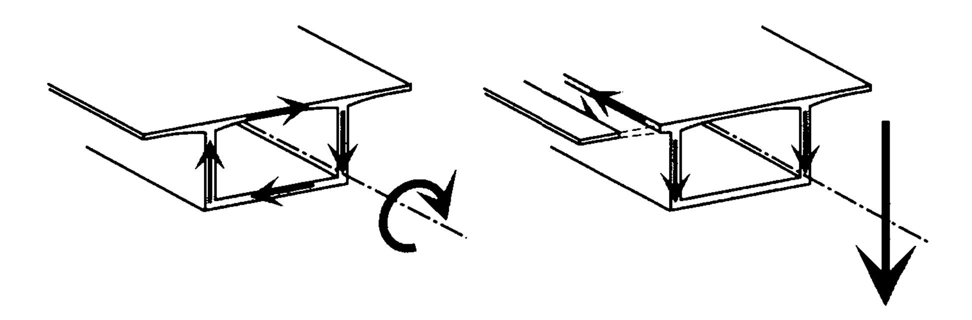


Figure 2.12: Exemples de cisaillement dans une structure

Les outils faciles d'accès permettant de prendre en compte les non-linéarités matérielles du béton de façon simple et efficace pour l'étude des effets de cisaillement sont rares. Cependant, de nombreuses recherches ont déjà été menées et plusieurs modèles ont été élaborés pour représenter le comportement de membranes en béton armé sous l'effet de sollicitations bi-axiales, incluant le cisaillement.

Les modèles décrits ci-après sont dans la droite ligne de ceux décrits comme extensions des modèles de fissuration discrète (§ 2.2.1.1). Il s'agit de modèles de comportement bidimensionnels (membrane en béton armé fissuré) utilisant directement des lois constitutives de bas niveau, telles que les lois σ-ε du béton non armé et de l'acier d'armature.

Différents modèles de ce type ont été élaborés, les plus connus étant le Modified Compression Field Theory (MCFT) de Vecchio et Collins [75], les Softened Truss Models (RA-STM et FA-STM) de Hsu [39,40,41], et, plus récemment, le Cracked Membrane Model de Kaufmann et Marti [45]. Sans entrer dans les détails, voici une brève description de ces modèles.

2.2.1.3.1 Modified Compression Field Theory

Ce modèle fait suite au Compression Field Theory [55] dans lequel la participation du béton tendu n'était pas prise en compte, ni la contribution de l'engrènement au droit des fissures à l'approche de la rupture. Les principales hypothèses sont :

- Les conditions d'équilibre et de compatibilité correspondent à un état plan de contrainte (état membranaire).
- Les lois constitutives pour l'acier et le béton sont des lois liant contraintes moyennes et déformations moyennes (fig. 2.13), qui peuvent être fort différentes des lois constitutives habituelles. En l'occurrence, pour l'acier la loi σ-ε est la loi élastique-plastique bilinéaire classique. Par contre, celle du béton s'en écarte pour plusieurs raisons. Non seulement il s'agit d'une loi contrainte moyenne – déformation moyenne, mais elle intègre la

participation du béton tendu entre les fissures, et tient également compte de l'état de contraintes-déformations biaxial.

- Les fissures se forment parallèlement à la direction principale moyenne de compression dans le béton (modèle de fissures tournantes).
- Les directions principales de contraintes et de déformations coïncident. L'expérience a montré que l'écart entre les deux ne dépasse pas 10°, même à la rupture.
- Les armatures ne transmettent que des contraintes axiales (pas de flexion locale des barres – dowel effect).
- La transmission des forces à travers les fissures n'est assurée que par les armatures, sauf en cas de plastification de ces dernières, auquel cas l'engrènement des granulats au droit de la fissure (aggregate interlock) peut être mobilisé pour assurer l'équilibre jusqu'à la rupture complète.

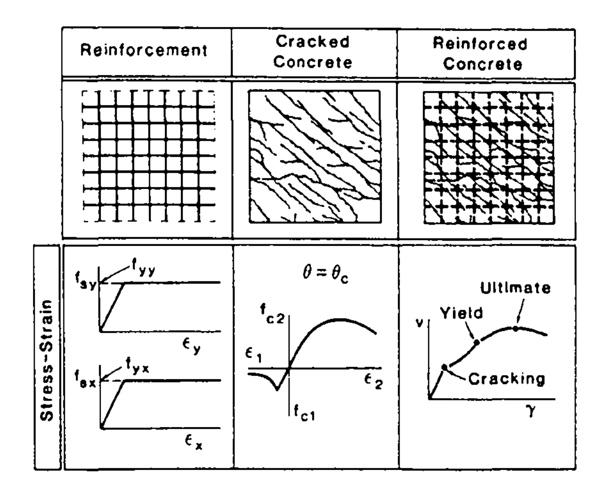


Figure 2.13: Loi constitutives de la MCFT et comportement du modèle en cisaillement pur [75]

2.2.1.3.2 Softened Truss Models

Le Rotating Angle Softened Truss Model (RA-STM [39]) de Hsu est très semblable à la MCFT, si ce n'est quelques différences dans la définition de la loi constitutive du béton. Concernant la transmission des forces à travers les fissures, les contrôles présents dans la version de 1986 de la MCFT ne trouvent pas de correspondant dans le RA-STM, lequel n'introduit aucune participation du béton pour la transmission de cisaillement dans le plan de la fissure. Des comparaisons sur des exemples numériques ont cependant montré une bonne concordance des deux modèles avec des résultats expérimentaux [20].

Partant du principe qu'un modèle de fissuration tournante ne peux pas prendre en compte correctement le cisaillement dans le plan d'une fissure, Hsu a développé le Fixed Angle Softened Truss Model (FA-STM [40]), dans lequel la direction de la fissuration n'est plus gouverné par les directions principales des contraintes dans le béton, mais par les directions

principales des contraintes appliquées à l'élément de béton armé. Une condition de contrôle de plastification des armatures au droit des fissures est introduite. La confrontation avec des résultats expérimentaux [83] a montré une sensible amélioration par rapport au RA-STM.

Il faut cependant noter que le critère de plastification introduit dans le FA-STM ne permet pas la plastification séparée des différentes nappes d'armatures, ni l'absence d'armature dans une direction [20].

2.2.1.3.3 Cracked Membrane Model

Récemment, les travaux de Marti, Alvarez, Kaufmann et Sigrist [45,53] ont conduit encore un pas plus loin. Les fissures sont supposées perpendiculaires à la déformation principale de traction. Les principes de base sont les mêmes que ceux de la MCFT concernant l'état de contrainte au droit d'une fissure, ainsi que la prise en compte de l'état de contrainte biaxial dans la loi constitutive du béton comprimé. En revanche, la participation du béton tendu est traitée de façon fondamentalement différente : en lieu et place d'une loi constitutive moyenne pour le béton en traction qui prenne en compte cet effet (MCFT, STM), le concept plus fondamental du Tension Chord Model (fig. 2.14) est utilisé. Le béton homogène et les armatures sont traités en tant que tels, tandis que l'interaction acier-béton est assurée par une loi d'adhérence, d'où un traitement implicite de la participation du béton tendu.

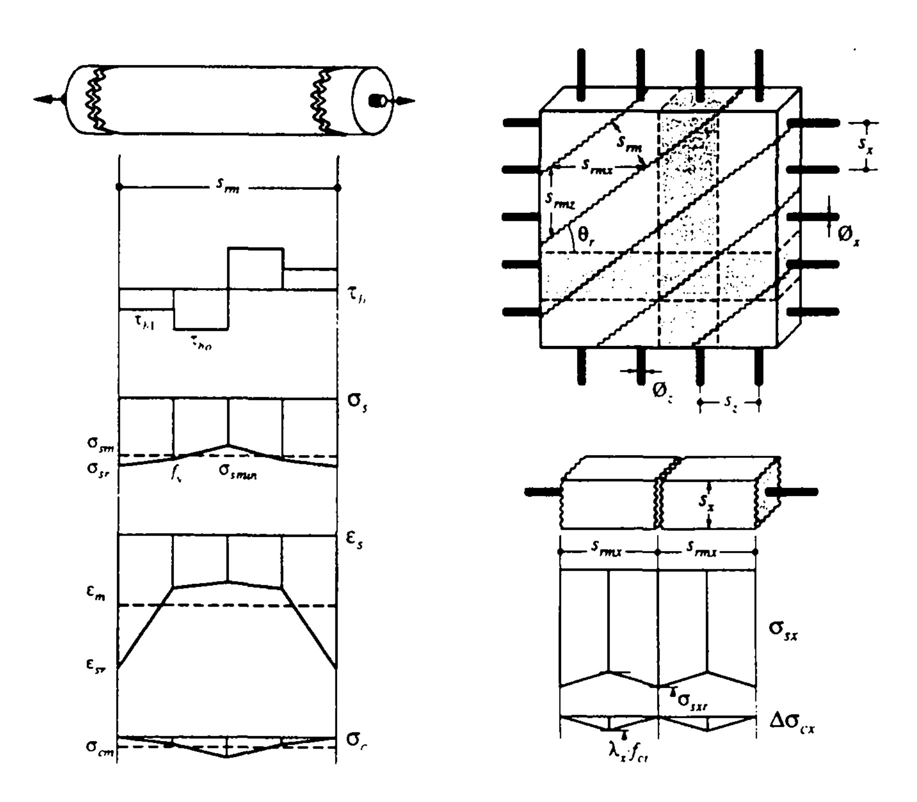


Figure 2.14: Tension Chord Model (Marti et al. [53]) et Cracked Membrane Model (Kaufmann et Marti [45])

Le modèle de membrane fissurée ainsi obtenu est donc très complet et, n'utilisant que des lois constitutives de bas niveau plutôt que des lois empiriques, très solide du point de vue théorique. Néanmoins, comme pour ses cousins, son application nécessite la résolution d'un système d'équations non linéaires par un processus itératif.

2.2.1.4 Utilisation de modèles unidimensionnels pour la modélisation de comportements bidimensionnels

Les modèles de comportement unidimensionnels pour le béton et le béton armé ne manquent pas, que ce soient des lois constitutives de bas niveau ou de modèles globaux tels que la loi du tirant ou la loi moment-courbure. Dès que l'on s'attaque à des éléments de structure bidimensionnels, membranes, dalles ou coques, on se heurte au délicat problème de la définition de la rigidité à la torsion (pour les dalles) ou au cisaillement membranaire (pour les membranes). A moins de les traiter de façon explicite dans un modèle local de fissuration, il n'est pas aisé de prendre en compte dans le cisaillement ou la torsion les effets combinés de la fissuration, de l'engrènement (aggregate interlock), du goujonnage des armatures (dowel effect) et des effets différés.

Les modèles de membrane fissurée présentés au paragraphe 2.2.1.3 sont une solution à ce problème. Une autre approche est de contourner le problème en appliquant un modèle de comportement unidimensionnel selon les directions principales (fig. 2.15), faisant ainsi disparaître le cisaillement (ou la torsion). Charif [18] a appliqué avec succès cette méthode au calcul de flèches à long terme de dalles, à l'aide la loi moment-courbure CEB-FIP.

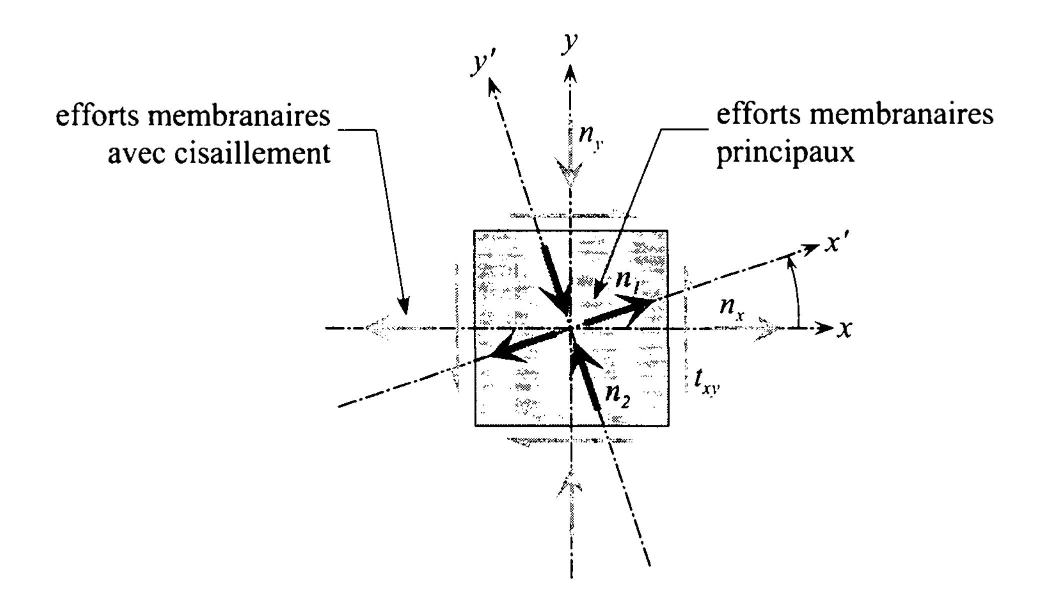


Figure 2.15: Efforts membranaires avec cisaillement et efforts membranaires principaux (absence de cisaillement)

Peut-être en raison de sa trop grande simplicité, cette démarche n'est pratiquement pas référencée dans la littérature (Cope & Clark [21]). Bien que nécessitant certains aménagements, son application au calcul de membranes en béton armé à l'aide d'un modèle global tel que la loi du tirant est peu onéreuse (voir chap. 4). Située dans la continuité logique des modèles de fissuration globaux, cette approche constitue donc un candidat particulièrement intéressant pour l'analyse d'ensemble d'ouvrages en béton à parois minces.

2.2.1.5 Synthèse

Les modèles de membrane fissurée décrits ci-avant sont certainement adaptés pour décrire le comportement d'éléments de taille réduite. Une bonne concordance a été constatée avec les différents résultats expérimentaux, cependant l'épaisseur des spécimens testés ne dépasse pas 200 mm, alors qu'une âme de pont, élément structural membranaire par excellence, en fait généralement le double. Or, comme pour les modèles de tirant, aucun des modèles de membrane présentés ne prévoit une prise en compte d'effets de taille dus à l'épaisseur de la membrane. La disposition des barres d'armature n'entre pas non plus en ligne de compte dans les calculs. De plus, tous ces modèles de membrane nécessitent des processus de calcul itératifs locaux qui les rendent lourds à manipuler dans le cadre de l'analyse d'un ouvrage complet.

La dernière approche présentée, combinée à un modèle de tirant, devrait permettre d'obtenir un modèle de calcul de membrane à la fois simple et efficace, à même d'être utilisé pour le calcul de structures de grande taille.

2.2.2 Fluage

Sous l'application prolongée d'une action, le béton présente un comportement viscoélastique vieillissant marqué. Il se manifeste par une augmentation des déformations sous contrainte constante. La relaxation, caractérisée par une diminution des contraintes sous déformation constante, est une autre manifestation des mêmes phénomènes physico-chimiques.

Lorsque les contraintes varient peu dans le temps, la prise en compte du fluage se fait généralement en remplaçant le module d'élasticité par sa valeur apparente à long terme :

$$E_c^{\varphi}(t,t_0)=\frac{E_c(t_0)}{1+\varphi(t,t_0)} \tag{2.14}$$

Le coefficient de fluage φ est le rapport entre l'incrément de déformation dû au fluage et la déformation élastique instantanée. Il dépend des caractéristiques du béton, de l'environnement (hygrométrie, température), de l'âge du béton au moment de la mise en charge et de la durée

de chargement. Les différentes normes de construction proposent diverses formulations pour ce coefficient de fluage, qui varie généralement entre 2 et 4.

Lorsque les contraintes varient au cours du temps, il est nécessaire de recourir à une modélisation plus détaillée. La formulation la plus couramment utilisée est le modèle viscoélastique linéaire, également connu sous le nom de principe de superposition, qui peut s'écrire sous la forme

$$\varepsilon(t,t_0) = \sigma_0 \cdot \Phi(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) \cdot \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \cdot d\tau \qquad (2.15)$$

où la fonction de fluage Φ est définie comme la déformation totale au temps t engendrée par une contrainte σ unitaire appliquée de t_0 à t. L'équation 2.15 permet, connaissant l'historique des contraintes, de déterminer celui des déformations. Cette équation peut être résolue par un processus incrémentiel à l'intérieur d'un modèle d'éléments finis, de façon à obtenir l'évolution complète des contraintes et des déformations dans une structure.

Le couplage avec des modèle de comportement physiques permet également de tenir compte des variations d'hygrométrie et de température dans le calcul de la fonction de fluage. Néanmoins, des modèles aussi poussés sont utilisés surtout pour l'analyse du comportement du béton au jeune âge, où ces phénomènes sont les plus importants, notamment en ce qui concerne les problèmes de maturation du béton et de retrait thermique.

Dans l'optique d'un calcul à long terme simplifié, pour lequel il n'est pas indispensable de connaître l'historique détaillé des contraintes et des déformations, il est possible, dans une certaine mesure, de généraliser la formulation de l'équation 2.14. L'étude de l'équation 2.15 a permis de déterminer un module d'élasticité ajusté de l'équation 2.16 dans lequel le coefficient de vieillissement χ permet de tenir compte d'une certaine variation des contraintes dans le temps.

$$E_c^*(t,t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi \cdot \varphi(t,t_0)} \qquad (2.16)$$

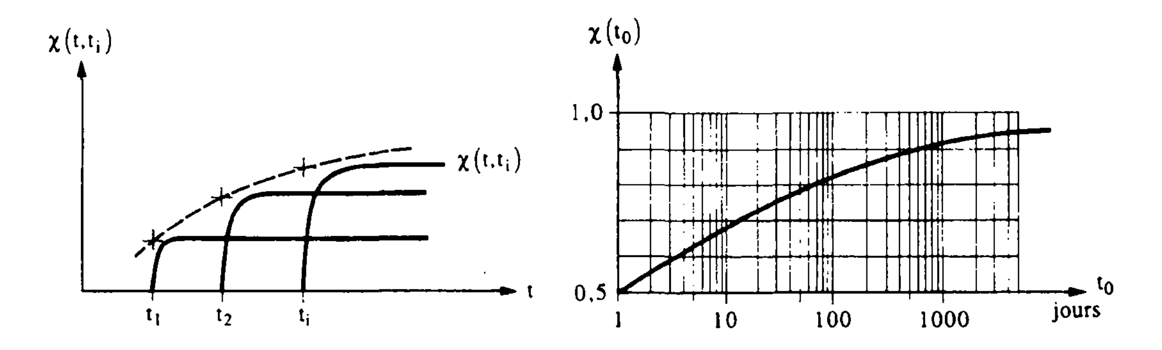


Figure 2.16: Evolution des $\chi(t,ti)$ (à gauche) et $\chi(t_0)$ simplifié selon l'équation 2.17 (tiré de [29])

Sa valeur est déterminée pour un historique de contraintes donné. Ainsi, pour une contrainte constante, χ vaut 1. Pour une action introduite graduellement, des études paramétriques ont montré [72] que le coefficient de vieillissement atteint rapidement sa valeur finale, laquelle ne dépend que de l'âge de mise en charge (fig. 2.16).

Ces observations ont permis l'établissement d'une seule courbe enveloppe qui est suffisamment précise pour les cas où l'intervalle de temps entre t_o et t dépasse 3 jours. Trevino a proposé la relation suivante [72] :

$$\chi(t,t_o) \cong \chi(t_o) = \frac{t_o^{1/3}}{1+t_o^{1/3}} \tag{2.17}$$

où t_o est l'âge de mise en charge donné en jours. Signalons que le code modèle CEB-FIP [17] préconise une fonction légèrement différente :

$$\chi(t,t_o) \cong \chi(t_o) = \frac{t_o^{1/2}}{1+t_o^{1/2}} \tag{2.18}$$

Un point qui mérite d'être mentionné ici est le problème posé par les redistributions de contraintes dues au fluage entre le béton et les armatures. Si l'on considère une simple section de béton armé symétrique soumise à un effort normal de compression centré (fig. 2.17), à l'instant de la mise en charge les contraintes se répartissent au prorata des modules d'élasticité instantanés. Avec le fluage, la rigidité apparente du béton diminue et les contraintes se redistribuent, déchargeant le béton. Ainsi, même si l'effort normal appliqué est constant, les contraintes dans le béton sont susceptibles de varier. De fait, il apparaît qu'un état de contrainte vraiment constant dans un élément de béton armé ne peut exister, ce qui fait que le coefficient de fluage φ ne peut être appliqué tel quel, d'un point de vue purement théorique, qu'à du béton non armé. Néanmoins, l'exemple numérique traité dans l'annexe A.2 (influence des redistributions dues aux armatures) montre que les divergences restent faibles.

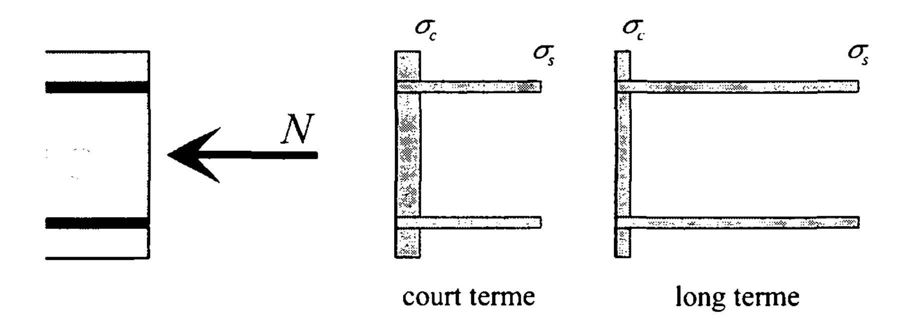


Figure 2.17: Section soumise à un effort normal de compression de longue durée ; redistribution des contraintes due au fluage

2.3 Actions

2.3.1 Actions permanentes et non permanentes

Les actions permanentes agissent sur la structure de façon constante dans le temps, sur toute sa durée d'utilisation. Ceci comprend notamment le poids propre, les charges de revêtement et autres équipements. Toutes les actions qui varient dans le temps sont a priori considérées comme non permanentes. Elles peuvent être subdivisées en actions ponctuelles, actions cycliques, actions graduellement variées.

Les actions ponctuelles peuvent être de deux types. Il peut s'agir de variations brusques des actions permanentes dues à des modifications de la structure. Elles se produisent généralement pendant la construction, mais peuvent aussi apparaître lors d'une réfection ou d'une modification de l'ouvrage, ou encore accidentellement. A l'opposé, il peut s'agir d'actions exceptionnelles qui n'agissent que pendant une courte période pour ensuite disparaître. Le cas le plus courant est le passage d'un convoi exceptionnel sur un pont.

Dans les actions cycliques viennent se ranger les charges de trafic et les sollicitations thermiques. Le passage d'un convoi exceptionnel peut aussi être considéré comme une charge cyclique, dans la mesure où il engendre un cycle charge-décharge de la structure.

Les actions graduellement variées comprennent notamment le retrait et les tassements d'appui, toutes actions appliquées sur la structure de façon progressive et en principe monotone. Entrent également dans cette catégorie les pertes lentes de précontrainte, ainsi que, d'une manière plus générale, les redistributions de contraintes dues au fluage entravé.

2.3.2 Actions directes et indirectes

Les actions directes sont les charges appliquées sur la structure. Même dans le cas d'une analyse non-linéaire, elles sont relativement simples à prendre en compte, dans la mesure où elles ne dépendent pas de l'état de sollicitation de la structure.

Les actions indirectes englobent toutes les déformations imposées et/ou entravées (retrait, gradients thermiques, tassements d'appuis). Ces actions posent plus de problèmes dans leur prise en compte, car elles dépendent généralement de l'état de sollicitation de la structure.

Prenons l'exemple d'un tirant en béton armé libre de tout appui. Le retrait tend à raccourcir le béton, tandis que les barres d'armature l'en empêchent. Ainsi, le béton est en traction et les armatures en compression, et, globalement, le tirant se raccourcit. Ce raccourcissement, que nous appellerons retrait apparent du tirant, est plus faible que celui qu'aurait la même pièce de béton sans armatures. Lorsque le béton se fissure, les barres d'armature ne sont plus

comprimées qu'entre les fissures. La contrainte moyenne de compression dans les aciers chute, et le retrait apparent fait de même. Notons que, déjà à ce stade, un calcul itératif est nécessaire à l'analyse d'un tel système.

Si maintenant un effort de traction est appliqué à ce tirant, la fissuration et l'endommagement de la liaison acier-béton augmentent. Le retrait du béton est donc encore moins bien transmis aux armatures, et le retrait apparent diminue encore. Ainsi, sous l'effet d'une autre action, l'action indirecte du retrait varie.

Les actions indirectes sont généralement graduellement variées. Le retrait de dessication du béton ou une variation de température ne sont pas instantanés. Mais même sans cet aspect progressif des actions indirectes elles-mêmes, leurs effets sur les structures sont variables dans le temps, du fait de la relaxation des contraintes. Un tassement d'appui brusque ne saurait donc être considéré comme une action permanente au sens strict, même s'il se produit d'un seul coup puis reste stable, car les contraintes engendrées diminuent ensuite dans le temps grâce à la relaxation.

2.3.3 Prise en compte des actions dans le calcul

Dans un calcul élastique linéaire, on peut sans problème calculer séparément les effets des différentes actions et les superposer. L'effet total n'est rien d'autre qu'une combinaison linéaire des effets partiels. Par contre, dès que des non-linéarités interviennent dans le calcul, cette superposition d'effets partiels calculés séparément n'est plus possible. L'exemple du tirant du paragraphe précédent illustre bien ce problème. Dans un calcul non-linéaire, toutes les actions doivent donc être prises en compte.

Tant qu'il ne s'agit que d'actions permanentes, elles peuvent être introduites globalement, le calcul du fluage se résumant à un simple coefficient (§ 2.2.2). Pour les actions non permanentes, un calcul rigoureux de l'historique détaillé de la structure nécessite un calcul pas-à-pas, introduisant les variations des actions à chaque étape du calcul, ce qui peut s'avérer très lourd.

Il convient cependant de relativiser les problèmes posés par la prise en compte des actions non permanentes. En effet, pour l'analyse du comportement à long terme la plupart de ces sollicitations peuvent être soit ignorées, soit traitées à l'aide de charges permanentes équivalentes.

Les actions ponctuelles dues au phasage durant la construction de l'ouvrage sont généralement négligeables, la relaxation faisant grandement disparaître leur effet à long terme. L'état de chargement final peut être seul pris en compte.

Rotilio et Laurencet ont montré [49,50,63] que les charges cycliques courantes, telles que les fluctuations journalières de trafic, n'occasionnent aucun dommage sur les ponts précontraints et n'ont donc aucun effet sur leur comportement à long terme. En revanche, le passage d'un convoi exceptionnel sur un pont précontraint présentant un degré de compensation des déformations β inférieur ou égal à 0.8 peut provoquer des dommages et des déformations irréversibles à long terme.

En ce qui concerne les actions graduellement variées, elles peuvent être traitées comme des actions permanentes, en introduisant une correction sur le coefficient de fluage (§ 2.2.2). Il faut cependant être prudent sur ce point. Les actions graduelles sont en général des actions indirectes, dont les effets peuvent être du même ordre de grandeur que ceux des actions permanentes. Or, le coefficient de fluage ne doit être corrigé que vis-à-vis des actions graduelles, et non pas des actions permanentes. Comme il n'est pas possible de dissocier les effets des différentes actions, une approche globale – ne faisant pas intervenir une discrétisation du temps – doit nécessairement faire intervenir une correction moyenne du coefficient de fluage, laquelle est délicate à obtenir. Etant donné les incertitudes qui demeurent tant dans la détermination du coefficient de fluage que dans celle de son coefficient de correction, l'approche qui consiste à effectuer deux calculs, l'un avec des valeurs optimistes, l'autre avec des valeurs pessimistes de ces coefficients, reste la plus raisonnable.

2.4 Calcul par éléments finis

L'analyse de structures par la méthode des éléments finis est aujourd'hui très répandue. Dans les bureaux d'ingénieurs, elle est le plus souvent limité au calcul élastique linéaire de modèles 2D, que ce soient pour des cadres plans ou des dalles, ce type d'analyse s'étend maintenant de plus en plus à des modèles spatiaux. Des modèles non-linéaires, tant géométrique que matériel, ne sont plus des raretés, tout spécialement pour les projets de grande envergure. Les simulations numériques de haut niveau ne sont plus l'apanage exclusif du monde académique.

Dans le domaine de la recherche, il n'est pas rare d'avoir recours à des modèles de calcul par éléments finis tels que ceux qui sont décrits au paragraphe 2.2.1.1. Il s'agit alors le plus souvent de développer ou de tester de nouveaux modèles de comportement.

Les différents types de modélisation ayant déjà été esquissés, nous ne nous attarderons ici que sur les aspects propres au contexte actuel qui n'ont pas encore été abordés. Afin de mieux situer les choses, quelques éclaircissement sont nécessaires concernant le point de départ du code de calcul par éléments finis qui a été utilisé dans ce travail.

2.4.1 Cadre de travail

L'idée de base était d'implémenter dans un logiciel existant un modèle de comportement matériel non linéaire pour le béton armé à l'état de service. Pour la modélisation de structures spatiales à parois minces, un code de calcul en coque est la solution qui s'impose logiquement. Le choix s'est porté sur le logiciel MAPS, qui présente un certaine nombre d'avantages dans le contexte particulier de ce projet de recherche.

- Le MAPS[2] est un logiciel de calcul par éléments finis destiné à l'analyse en coque de structures à parois minces pouvant comporter des nervures (ou raidisseurs) ainsi que des câbles de précontrainte. Ses principes de base, ainsi que ses pré- et post-processeur en font un outil particulièrement adapté pour l'étude de structures précontraintes à parois minces.
- Il a été développé par Bouberguig [10] à l'EPFL et la collaboration s'est poursuivie, notamment avec l'IBAP dans le contexte des effets différés [51], ainsi qu'avec différents instituts et laboratoires de l'école. Cette proximité assure du même coup la disponibilité des sources du logiciel et un soutien logistique de la part de son auteur. De plus, les développements nécessaires sont grandement facilités par une bonne connaissance préalable du logiciel par l'auteur de ce travail.
- Ce logiciel est déjà utilisé dans les bureaux d'ingénieurs, ce qui constitue un point important pour la mise à disposition des praticiens des développements réalisés dans le présent travail de recherche.

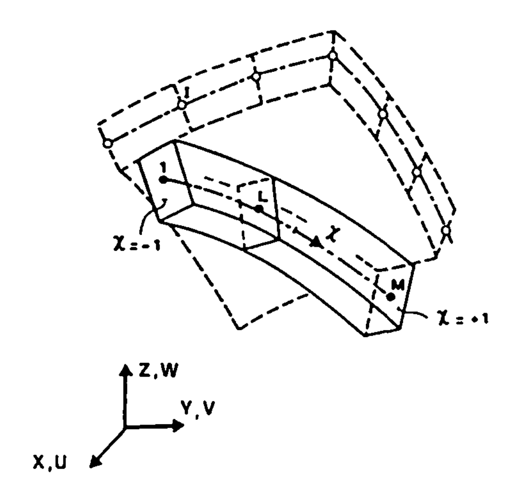


Figure 2.18: Element coque à 4 nœuds par côté (cubique) avec nervure excentrée [10]

Les éléments finis utilisés sont des éléments de coque d'épaisseur modérée. Il s'agit d'une variante particulière des éléments isoparamétriques d'Ahmad [3], éléments de type Mindlin à géométrie courbe. Ce modèle comporte également une définition particulière de nervures excentrées qui sont indépendantes du réseau d'éléments finis et dont la liaison avec la coque

[2] Macro-element Analysis of Prestressed and Stiffened shell structures

est continue tout au long de la nervure (fig. 2.18). La précontrainte est introduite dans le modèle directement en donnant le tracé des câbles et leur tension.

Ce modèle de calcul présente donc toutes les outils nécessaires au calcul élastique linéaire de structures en béton précontraint à parois minces. Cependant, il s'agit d'un code de calcul élastique linéaire, et il faut donc y incorporer les éléments nécessaires à un calcul non linéaire matériel. Cela comporte :

- Une loi de comportement non linéaire pour le béton armé et précontraint (§ 2.2)
- Un processus non-linéaire pour la résolution du système

2.4.2 Algorithmes pour la résolution de problèmes non-linéaires

La résolution de problèmes non-linéaires par la méthode des éléments finis nécessite le recours à des algorithmes de calcul itératifs [84], la complexité et la taille des problèmes concernés ne permettant que très rarement d'obtenir une solution analytique. Le principe de base reste toujours le même : un premier calcul linéaire est suivi d'une série de corrections, toujours linéaires. Il existe de nombreuses méthodes, proposant différentes formulations pour les termes correctifs des itérations.

Entre autres, la méthode de Newton-Raphson assure une convergence très rapide. Elle consiste à passer d'une itération à la suivante en utilisant le module tangent. La figure 2.19a montre un exemple avec une seule inconnue. L'application stricte de cette méthode impose le recalcul complet de la matrice de rigidité tangente à chaque itération. Il existe des variantes où la matrice n'est pas recalculée à chaque itération (Newton-Raphson modifié).

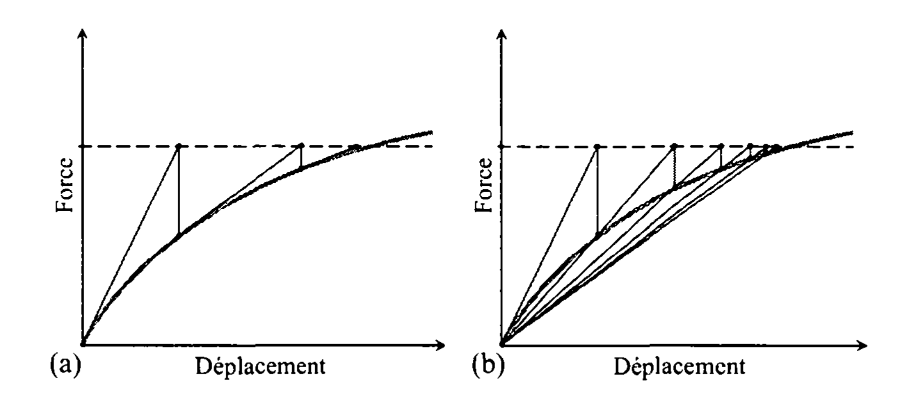


Figure 2.19: Processus itératifs (a) Newton-Raphson (b) itération directe (Picard)

La méthode de l'itération directe (ou Picard ou encore module sécant, figure 2.19b) converge de façon sensiblement moins rapide, mais son implémentation est beaucoup plus légère. Le coût de calcul par itération est le même que pour la méthode Newton-Raphson (recalcul complet de la matrice de rigidité à chaque itération). Par contre, pour autant que le chargement de la structure se fasse en une seule étape, il n'y a pas nécessité de disposer d'un

moteur de calcul incrémental (avec prise en compte d'un état initial de contraintes et de déformations non nulles). Un code de calcul élastique linéaire peut donc beaucoup plus facilement être adapté pour ce genre d'application.

Une autre particularité de ce type de problème est que la solution peut dépendre du chemin parcouru pour y parvenir. C'est par exemple le cas si les lois de comportement utilisées ne sont pas conservatives : endommagement du béton sous charges cycliques, frottement des câbles dans leur gaine. Cela peut aussi être le cas lors de calcul à la ruine où les non linéarités géométriques peuvent engendrer un tel comportement (stabilité des structures). Pour résoudre ce point, il est nécessaire de suivre la courbe de mise en charge pendant le calcul, et donc de charger la structure progressivement. La charge est appliquée en plusieurs pas, suffisamment petits pour suivre le comportement global de la structure. Il peut même être nécessaire, à un moment ou un autre, de décharger partiellement la structure.

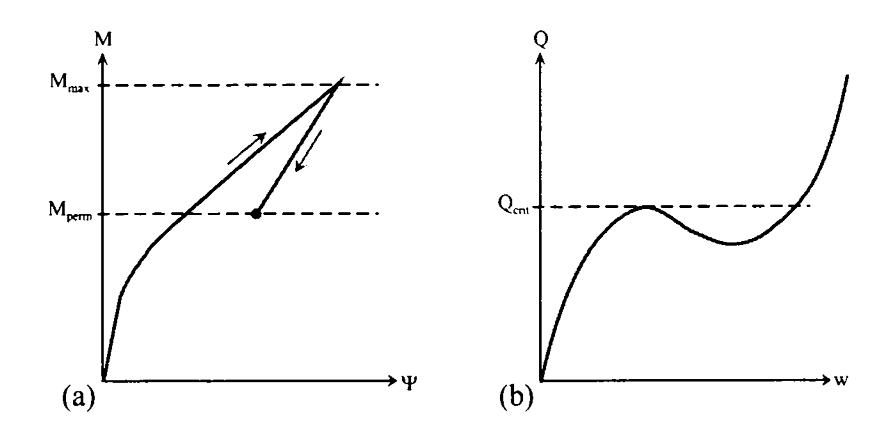


Figure 2.20: Problèmes non-linéaire dont la solution dépend du chemin de mise en charge. (a) loi moment-courbure avec branche de décharge (Rotilio [63]) (b) courbe charge-déformation théorique d'un arc surbaissé ; à la charge critique, la structure se retourne (snap through) et se transforme en un arc suspendu.

Fort heureusement, dans le contexte de l'état de service, les non-linéarités sont relativement douces. Pour des structures en béton raisonnablement armées, la loi du tirant utilisée reste monotone. Dans la mesure où le domaine d'étude considéré est l'état de service à long terme sous charges permanentes, il n'y a ni branche de décharge, ni comportement extrême à la ruine. La mise en charge de la structure en une seul étape ne pose donc aucun problème.

2.5 Précontrainte

2.5.1 Définition de la quantité de précontrainte

Du fait de sa simplicité, la méthode de balancement des charges est très populaire pour définir la quantité de précontrainte dans un ouvrage. Cependant, son application à des structures complexes, présentant une forte variation de la géométrie ou une hyperstaticité, reste difficile, car la valeur du degré de balancement peut varier fortement d'une section à l'autre.

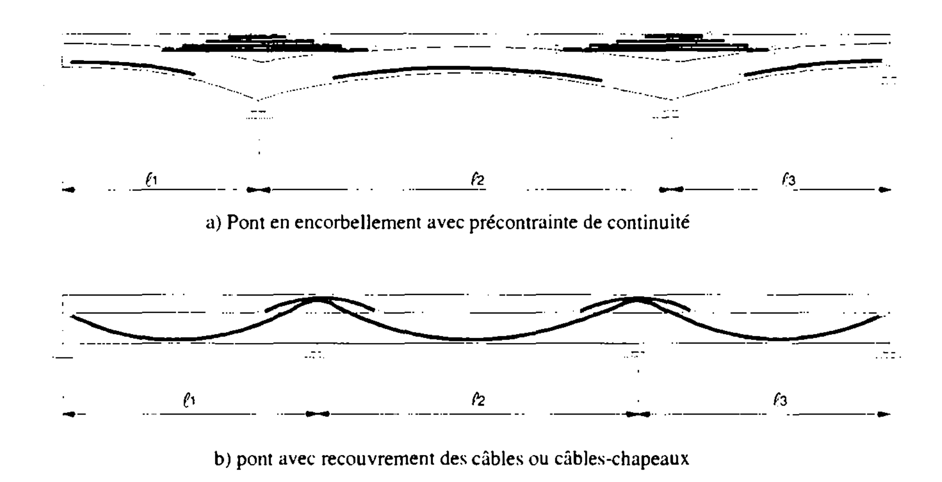


Figure 2.21: Exemples de géométries où l'application de la méthode de balancement des charges est malaisée [27]

En fait, même dans le cas de structures soumises à une précontrainte parabolique classique, le fait que l'effort normal en tant que tel ne soit pas considéré peut conduire suivant les cas à des différences notables dans le comportement à l'état de service. Par exemple, un même degré de balancement peut correspondre, suivant la géométrie de l'ouvrage et l'effort normal, à une précontrainte totale (pas de contraintes de traction dans le béton), ou à une précontrainte partielle. Ce second cas est nettement moins favorable pour ce qui est de la fissuration et déformations à long terme, mais ne sera pas nécessairement détecté dans une approche qui ne considère que les forces de déviation.

La méthode de compensation des déformations reprend, mais en tenant compte de l'effort normal, la simplicité du critère de balancement et l'étend à tous les types de structures précontraintes sans restrictions. Le critère considéré dans cette méthode est la flèche qui est limitée à une faible partie de la flèche induite par les charges permanentes, et ce au moyen du **degré de compensation des déformations β :**

$$\beta = -\frac{w_c(P)}{w_c(g)} \tag{2.19}$$

w_c : flèche élastique à mi-travée (positive vers le haut)

P : précontrainte

g : charges permanentes et éventuellement quasi-permanentes

β : degré de compensation des déformations

L'expérience a montré que le degré de compensation des déformations β vaut, pour la majorité des ouvrages précontraints, entre 0.5 et 1.0. Des valeurs inférieures relèvent généralement de cas pathologiques. Plusieurs projets de recherche ont été mené concernant le choix de la quantité de précontrainte à mettre en œuvre dans un ouvrage. La principale conclusion qui en ressort [27,50] est qu'une précontrainte avec un degré de compensation des déformations β élevé (supérieur ou égal à 0.8) permet, sauf cas exceptionnel, de réduire drastiquement, voire d'annuler les incertitudes introduites dans le comportement structural par certains paramètres tels que la résistance à la traction du béton ou le fluage, assurant du même coup une meilleure durabilité d'ensemble.

2.5.2 Modélisation de la précontrainte

L'introduction de câbles de précontrainte dans une modélisation EF d'une structure en béton peut se faire essentiellement de deux manières différentes, dites méthodes externe et interne.

La **méthode externe** consiste à appliquer à la structure toutes les forces de déviation engendrées par les câbles de précontrainte. Dans un calcul manuel classique de poutre continue, cela se résume généralement à un jeu de charges réparties verticales dans les zones de travées et de forces concentrées sur les appuis et au droit des ancrages. Dans une modélisation spatiale (coque ou massif), les forces de déviation peuvent être appliquées directement le long du tracé du câble.

La **méthode interne**[3] [58,59,60] considère le câble de précontrainte non plus comme une charge appliquée, mais comme un élément de structure actif. Il est inclus à l'intérieur des éléments finis et possède ses propres degrés de liberté, lesquels représentent le glissement du câble dans sa gaine. Il est caractérisé par sa section, son matériau, ainsi que les conditions de frottement entre le câble et la gaine. Un calcul avec prise en compte des étapes de mise en tension de la précontrainte permet d'obtenir directement comme résultat la tension réelle tout le long des câbles tenant compte des pertes par frottement. Une éventuelle injection des câbles se manifeste par la modification du coefficient de frottement câble-gaine. Les forces de déviation résultant de la tension des câbles sont implicitement prises en compte, ainsi que la rigidité propre des câbles.

[3] A notre connaissance, seul le logiciel César-LCPC (Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris) propose une telle implémentation de la précontrainte.

La méthode externe est beaucoup plus courante et largement appliquée dans la pratique, avec divers degrés de finesse de modélisation. Cependant, si elle est très facile à mettre en œuvre, son utilisation dans le calcul non-linéaire pose certains problèmes, le plus important étant qu'elle ne tient pas compte de la rigidité des câbles de précontrainte. Une telle approximation est tout à fait satisfaisante dans le cas d'un calcul élastique linéaire. Par contre, la simple introduction du fluage dans le calcul nécessite de faire intervenir les câbles en tant qu'éléments structuraux. En effet la baisse de rigidité apparente du béton à long terme redistribue partiellement les contraintes sur les armatures, passives et actives. Ce problème se fait encore plus aigu pour l'étude de la fissuration du béton, où toutes les armatures adhérentes contrôlent l'ouverture des fissures.

Une originalité de ce travail est de proposer une troisième façon de tenir compte de la précontrainte, en superposant les charges équivalentes de la méthode externe et des éléments permettant de tenir compte de la rigidité des câbles de précontrainte (voir § 4.2).

3 Modèle de calcul unidimensionnel

La description du modèle de calcul développé a été séparée en deux parties. Dans un premier temps, un modèle de comportement unidimensionnel (modèle de tirant) est décrit de façon détaillée, ainsi que toutes les hypothèses qui y sont liées. Le chapitre suivant traite l'extension de ce modèle au calcul bidimensionnel, autrement dit son application au calcul des membranes en béton armé, et son implémentation dans un code d'éléments finis.

3.1 Hypothèses et champ d'application

3.1.1 Actions considérées

Avant de toute autre considération, il est important de rappeler que tout ce qui suit se rapporte au comportement en service à long terme des structures en béton. Les sollicitations considérées seront donc des sollicitations **permanentes** de **service**.

- **Sollicitations pouvant être considérées comme permanentes**

Il s'agit principalement des charges permanentes telles que le poids propre de la structure et du revêtement. Cela peut également englober éventuellement la part fréquente des charges variables (trafic).

La prise en compte d'actions variant lentement, telles que le retrait de dessiccation ou un tassement d'appui, est envisageable, mais uniquement sous la forme d'une sollicitation constante (valeur moyenne ou finale, selon les cas). Par contre, on écartera des actions cycliques telles que les variations journalières de température.

De même, des variations de charges instantanées durant la vie de l'ouvrage ne seront pas prises en compte. Ainsi, le phasage de construction ne sera pas modélisé en tant que tel. Encore une fois, le but étant d'obtenir l'état de l'ouvrage à long terme, la dissociation d'événements relativement proches dans le temps au début de la vie de l'ouvrage n'entraîne généralement pas de différences significatives, à cause de la relaxation des contraintes dans le béton. Si certains aspects du phasage ne peuvent pas être ignorés à long terme, ils devront être pris en compte de manière détournée, en introduisant dans le système une sollicitation résultante équivalente. Typiquement, il s'agit du retrait différentiel entre deux zones différentes à l'intérieur d'une même section (fig. 3.1).

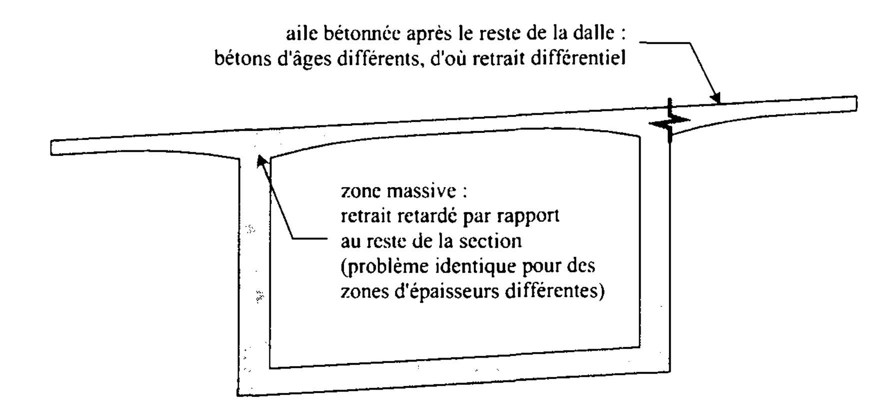


Figure 3.1: Retrait différentiel dans une section de pont

- **Limitation des sollicitations permanentes**

Seuls des niveaux de chargement de service seront considérés. L'extension du modèle proposé au calcul à la ruine des structures sort du cadre de ce travail.

3.1.2 Calcul de la fissuration

Comme décrit au chapitre 1, bon nombre de structures en béton sont composées de parois minces ou d'épaisseur modérés. Dans la plupart des cas, si l'on considère le comportement global de l'ouvrage, ces éléments de parois travaillent essentiellement comme des membranes. La flexion locale joue peu de rôle au niveau global. Par contre, elle est souvent nécessaire pour assurer l'équilibre de la structure (fig. 3.2) et peut être prépondérante dans certaines parties du dimensionnement. Typiquement, dans un pont caisson, le dimensionnement longitudinal est gouverné par les efforts membranaires dans les différentes parois, tandis que le dimensionnement transversal dépend de la flexion locale des mêmes éléments. La figure 3.3 montre que dans les dalles d'un pont caisson, les contraintes longitudinales dues à la flexion locale sont négligeables en regard de celles dues à la flexion globale (autrement dit, des contraintes membranaires).

Afin de bénéficier du maximum de liberté pour la modélisation spatiale des structures, sans toutefois trop entrer dans les détails, un modèle d'élément fini de type coque est très adapté[1]. Un tel modèle est à même de représenter correctement les comportements membranaire et flexionnel de structures à parois minces. Cependant, le but étant d'observer le comportement global des structures, ce sont les efforts membranaires qui seront investigués en premier lieu.

[1] Les éléments de type plaque-membrane permettent également de faire intervenir conjointement les efforts membranaires et flexionnel, mais pas les interactions qui découlent d'une éventuelle courbure de la surface modélisée. De tels éléments sont nécessairement plans et imposent donc une modélisation en facettes des surfaces courbes, ce qui peut nuire à la précision des résultats, surtout lorsque les effets membranaires sont importants, voire prépondérants. Ajoutons encore que les surfaces courbes sont relativement courantes dans les ouvrages d'art (par exemple, une âme d'un pont courbe).

Il n'est donc pas nécessaire de faire intervenir la flexion locale dans le calcul non-linéaire matériel des éléments structuraux, ce qui permet de simplifier considérablement le modèle de calcul.

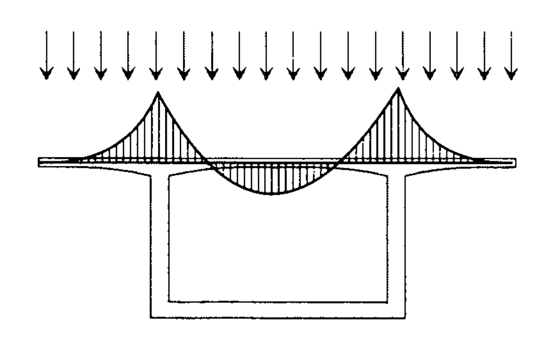


Figure 3.2: Flexion transversale d'un tablier de pont

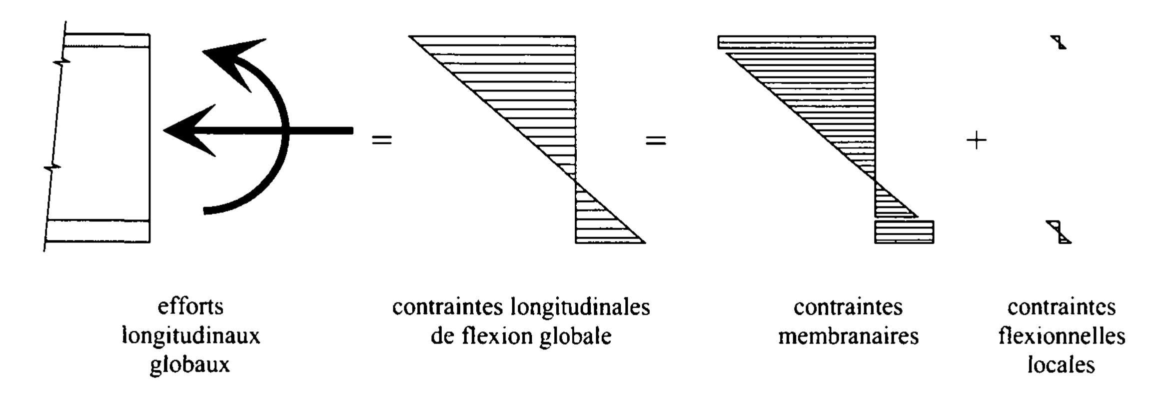


Figure 3.3: Contraintes longitudinales dans un caisson. Séparation des contraintes membranaires et flexionnelles locales.

Notamment Vecchio et Collins proposaient d'utiliser un modèle de calcul membranaire pour le dimensionnement des structures plissées [75] (voir chapitre 2). L'idée est reprise ici de ne tenir compte que des efforts membranaires pour effectuer le calcul de la fissuration. La flexion locale est présente dans le calcul statique, puisque généralement nécessaire à l'équilibre, mais elle n'est pas prise en compte pour l'évaluation de la fissuration. Le modèle représentera donc correctement le comportement membranaire des éléments structuraux et donc le comportement globale de la structure, *mais pas le comportement flexionnel local.* Cela n'est pas limitatif dans la mesure où les résultats recherchés font intervenir essentiellement les efforts membranaires.

Les baisses de rigidité apparente dues à la fissuration et au fluage sont introduites dans le modèle sous la forme d'un module d'élasticité anisotrope équivalent (matrice d'élasticité D). La rigidité flexionnelle locale d'un élément se voit donc réduite du même facteur que la rigidité membranaire correspondante.

Dans les différents modèles de membrane fissurée existants, on retrouve comme constante une séparation du béton et de l'acier d'armature. Les conditions d'équilibre et de déformation

sont définies au niveau de la membrane, et les lois constitutives des deux matériaux sont appliquées séparément et sont définies en contraintes et déformations moyennes et doivent être adaptées en conséquence. L'assemblage acier-béton est réalisé au niveau du modèle bi-dimensionnel (fig. 3.4a).

La différence fondamentale dans le modèle proposé ici est que l'interaction acier-béton est entièrement définie par un modèle de tirant unidimensionnel. Les lois constitutives des matériaux acier et béton n'ont pas à être adaptées dans ce cas. C'est le modèle de tirant qui fait office de loi constitutive pour le nouveau matériau « béton armé ». Il s'agit d'une relation contrainte moyenne-déformation moyenne. Cette relation est introduite dans le calcul membranaire selon les directions des contraintes principales (fig. 3.4b). Il est important de noter ici que la moyenne des contraintes n'est plus faite seulement en longueur, c'est-à-dire par exemple entre deux fissures. Elle est également faite sur la section de béton armé considérée, l'état de contrainte ne pouvant pas être uniforme dans une section composée d'acier et de béton. Par exemple dans une section en stade I, les contraintes dans l'acier sont plus élevées que dans le béton d'un facteur correspondant au rapport des modules d'élasticité. En fait, on peut considérer qu'il s'agit de contraintes moyennes sur un volume de béton armé, tandis que les modèles précédents utilisaient des contraintes moyennes sur des volumes de béton et d'acier distincts.

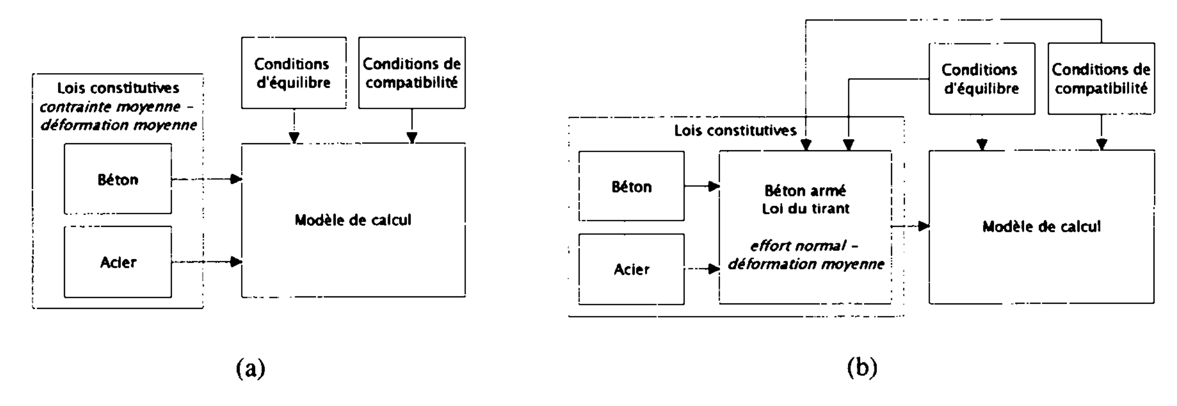


Figure 3.4: Principes généraux des modèles de fissuration (a) MCFT - STM (b) approche proposée

3.1.3 Prise en compte du fluage

La prise en compte du fluage dans le modèle proposé, contrairement à la fissuration, ne présente aucune nouveauté. Le but étant de connaître le comportement final à long terme et non l'évolution de la structure dans le temps, la méthode simplifiée du module ajusté a été adoptée (éq. 3.1).

$$E_c^{\varphi}(t,t_0)=\frac{E_c(t)}{1+\varphi(t,t_0)} \tag{3.1}$$

Ceci amène néanmoins quelques commentaires. Dans les méthodes globales de calcul des déformations à long terme (méthode des coefficients globaux [29]), le module ajusté est appliqué à des sections ou même des structures complètes. Ceci nécessite l'introduction de coefficients de correction afin de tenir compte de la présence des armatures, lesquelles empêchent les déformations de fluage de se développer librement. La loi du tirant écarte ce problème en appliquant le module ajusté au béton seul, indépendamment des armatures. De cette façon, les questions de fluage entravé et de déplacement du centre de gravité dues aux non-linéarités matérielles (essentiellement le fluage) se règlent d'elles-mêmes.

La variation des charges n'est pas inclue dans le modèle (§ 3.1.1). Néanmoins, l'effet d'actions variant progressivement peut être pris en compte à travers une adaptation du coefficient de fluage et en introduisant la valeur du produit $\chi\varphi$ en lieu et place de φ. Il reste toutefois délicat de combiner des charges constantes avec des charges variant dans le temps (par exemple poids propre et tassements d'appuis), la seule méthode pour obtenir une valeur correcte du coefficient de vieillissement pour un historique de contraintes quelconque restant l'intégration pas à pas de l'équation générale du fluage.

Cependant, même si aucune charge extérieure ne varie, les redistributions d'efforts intérieurs dues au fluage agissent localement comme des variations progressives de chargement, dont il faudrait théoriquement tenir compte. Entrent dans la même catégorie les redistributions d'efforts entre les armatures et le béton dans une même section sous l'effet du fluage. Toutes ces redistributions internes engendrent de nouvelles fonctions de fluage qui viennent se superposer à celles dues aux charges extérieures. Mais ces effets restant généralement faibles en regard de ceux des charges extérieures (voir annexe A.2), ils sont négligés dans le modèle proposé.

3.2 Loi du tirant modifiée (LTM)

Le développement du modèle nécessite, dans un premier temps, une loi constitutive uniaxiale pour le matériau béton armé. Cette loi prend en compte la fissuration, le fluage, ainsi que les comportements liés à l'adhérence acier-béton, soit principalement la participation du béton tendu situé entre les fissures (tension stiffening).

Le modèle de tirant développé ici est dérivé de la loi du tirant proposée par Sippel dans une contribution du CEB [16], qui est elle-même une variation de la loi du tirant CEB-FIP [17]. Les modifications introduites ont différentes origines. D'une part, il s'agissait de faciliter l'utilisation dans un calcul de structure complexe. D'autre part, il était nécessaire de tester et caler ce nouveau modèle dans son contexte particulier. Bien que de formulation empirique, la loi moment-courbure CEB-FIP (LMC) a déjà donné de bons résultats. C'est pourquoi, malgré son relatif manque de rodage vis-à-vis des modèles de tirant en général, elle constitue un point

de repère commode. Elle a donc été utilisée comme tel pour la validation de l'application au calcul flexionnel du modèle de tirant.

Tout en gardant toujours à l'esprit que le modèle de tirant est destiné à être finalement introduit dans un modèle de calcul essentiellement membranaire en tant que loi constitutive du béton armé, une application simplifiée au calcul de sections en béton armé ou précontraint soumises à de la flexion composée a été mise en œuvre. Cela a permis de comparer les résultats obtenus avec le modèle relativement bien rôdé qu'est la loi moment-courbure CEB-FIP. Il a ainsi été possible d'adapter la loi du tirant initiale de façon à améliorer la concordance des deux modèles. Notons d'ores et déjà que la loi du tirant de base (LT), telle que formulée par Sippel, donne des résultats très similaires à la loi moment-courbure CEB-FIP.

3.2.1 Modèle de base

La formulation finale de la loi du tirant modifiée utilisée suit le même principe général que la plupart des modèles de tirant existants, à savoir, une loi multi-linéaire clairement divisée en quatre phases : stade I (non fissuré), formation des fissures, fissuration stabilisée et rupture (plastification des armatures) (fig. 3.5). Le terme *fissuration stabilisée* peut prêter à confusion. La dénomination anglophone *final crack pattern* décrit mieux cette phase qui correspond en fait à l'augmentation de l'ouverture des fissures existantes sans apparition de nouvelles fissures.

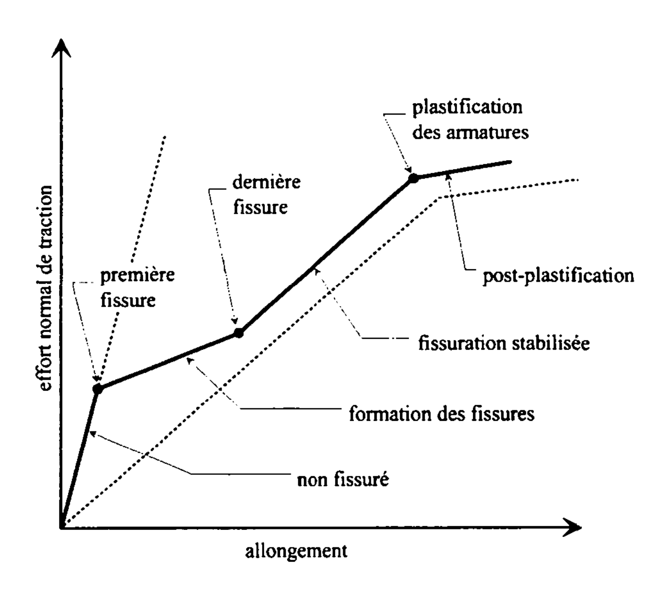


Figure 3.5: Allure de la loi du tirant généralement admise

La définition des différents points caractéristiques de la loi varie passablement d'une formulation à l'autre. Celle qui a été adoptée ici comme base est celle de Sippel dans [16].

Pour des raisons de facilité d'implémentation et de clarté du modèle, elle a été réécrite ici sous la forme

$$N = N(\varepsilon) \tag{3.2}$$

au lieu de la classique formulation

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma_{s2}) \tag{3.3}$$

La quantité σ_{s2} représente la contrainte dans les armatures en stade II-nu, soit au droit d'une fissure, si le comportement iso-adoucissant du béton est négligé. Dans un tirant, les contraintes varient le long des barres d'armatures, la valeur au droit d'une fissure est une borne supérieure, et non pas une moyenne. De plus, avant fissuration cette quantité n'a aucune signification physique. Enfin, dans le cas d'un voile soumis à des sollicitations bidirectionnelles, le calcul des contraintes dans les armatures n'est plus aussi direct, comme il sera montré plus loin. Tous ces éléments font qu'une représentation en contraintes nuit à la clarté du modèle. Par contre, l'effort normal reste constant sur toute la longueur d'un tirant donné et ne peut donc pas prêter à confusion.

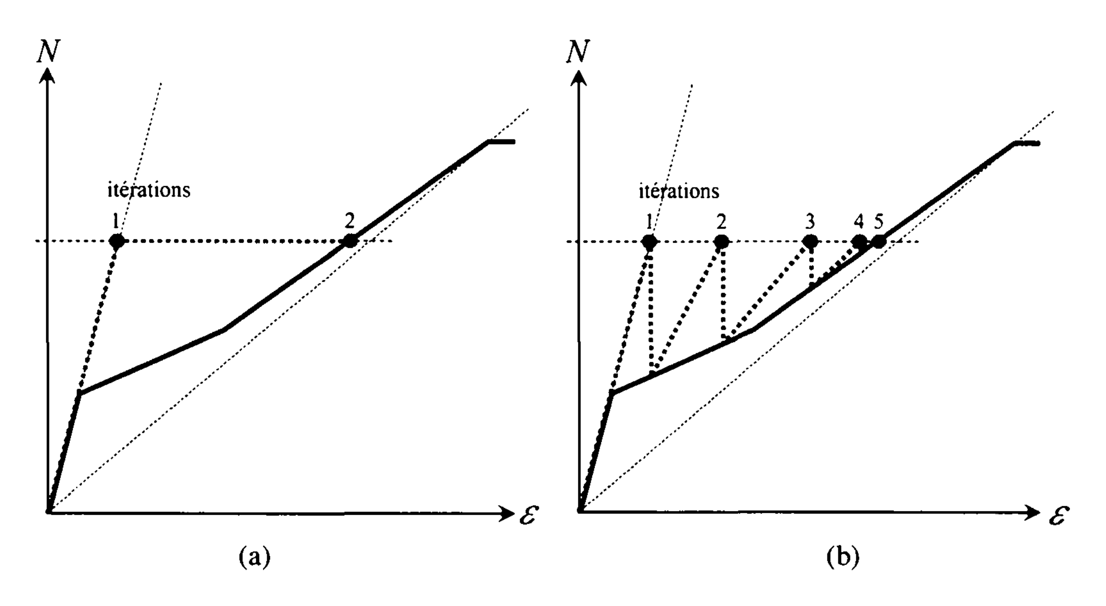


Figure 3.6: Principe de convergence (a) en force et (b) en déformation imposée

Indépendamment de ces considérations de clarté du modèle, il était préférable, pour des raisons de stabilité numérique, de conduire le calcul en déformation plutôt qu'en force. En effet, la première solution engendre des variations de rigidité apparente moins brusques que la deuxième et favorise le contrôle de la convergence. La figure 3.6a montre qu'à la deuxième itération déjà l'état de fissuration correspondant à l'effort imposé est atteint, alors que si le calcul est dirigé en déformation (fig. 3.6b), la convergence est plus progressive. En réalité, ces variations de rigidité engendrent des redistributions des efforts dans la structure, contrairement à l'effort constant que montre la figure 3.6. Une variation progressive des rigidités permet de mieux suivre les redistributions d'efforts et d'améliorer la convergence.

De plus, le calcul de la réponse d'une section soumise à une sollicitation supérieure à sa résistance ultime est problématique dans le cas d'une formulation en force (figure 3.7). Dans ce cas de figure, l'application d'une force supérieure à la résistance ultime de la section n'a pas de solution, du point de vue mathématique. Par contre, en déformations imposées, même un allongement supérieur à l'allongement de rupture mène à une solution évidente, le palier de plastification pouvant toujours être prolongé.

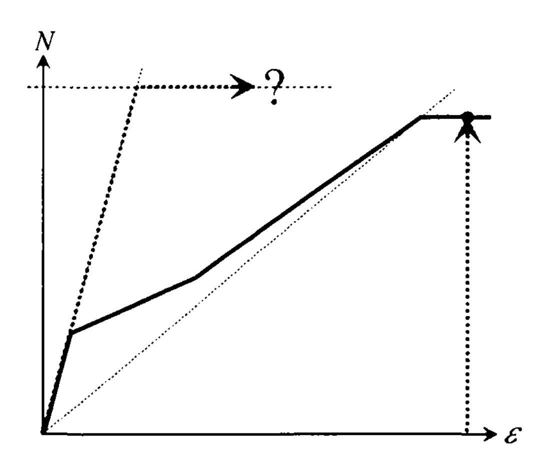


Figure 3.7: Réponse d'une section sollicitée au-delà de sa résistance ultime

3.2.2 Adaptation de la branche de fissuration stabilisée

Deux modifications ont été introduites dans la loi du tirant elle-même. La première concerne la phase de fissuration stabilisée. La loi moment-courbure CEB-FIP montre un comportement asymptotique au stade II-nu quand le moment de flexion augmente (fig. 3.8). Par contre, dans la formulation de base de la loi du tirant, la phase de fissuration stabilisée est parallèle au stade II-nu jusqu'à la plastification des armatures.

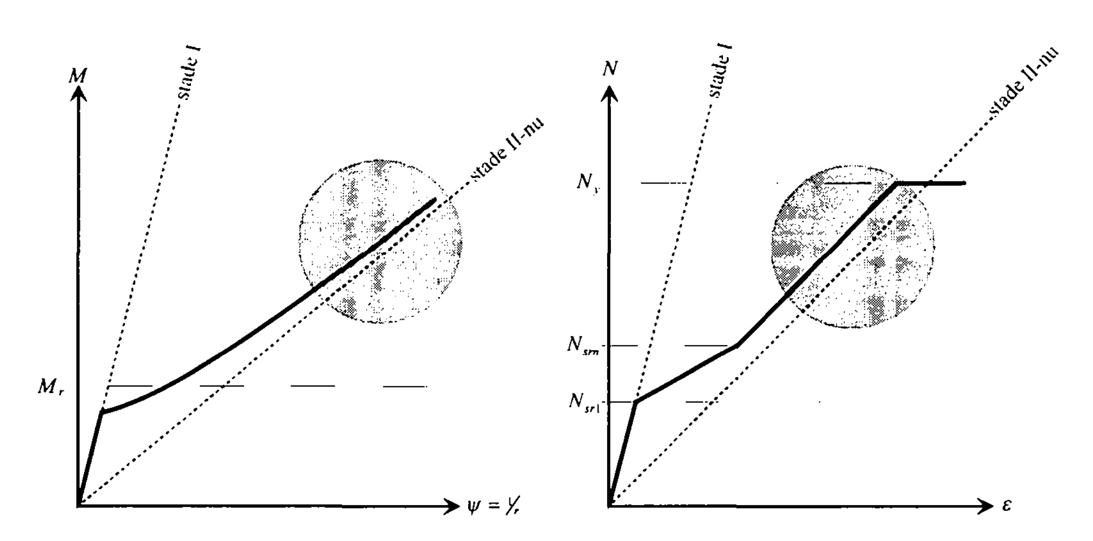


Figure 3.8: Comportement asymptotique de la loi moment-courbure et comportement parallèle de la loi du tirant CEB-FIP.

Il est clair que la reconstitution d'une loi moment-courbure par intégration d'une telle loi de tirant ne peut pas conduire au comportement asymptotique de la LMC. C'est pourquoi la branche de fissuration stabilisée de la loi du tirant a été modifiée comme décrit à la figure 3.9. Cette modification avait déjà été proposée par Bruggeling [13] pour des sections précontraintes.

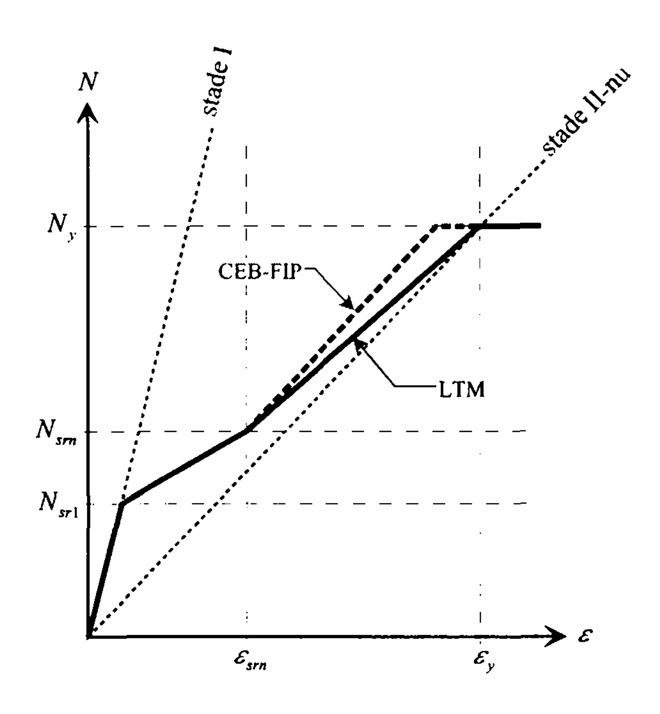


Figure 3.9: Modification de la branche de fissuration stabilisée

3.2.3 Cas des sections faiblement armées

La deuxième modification concerne le cas des sections très peu ou pas du tout armées. Il est clair qu'en pratique ce cas de figure ne devrait normalement pas se présenter, toute section comportant au moins une certaine quantité d'armature constructive. A fortiori, il n'est pas dans les attributions d'un modèle de tirant en béton armé de représenter le comportement du béton non armé. Néanmoins, afin de permettre une utilisation plus souple du modèle pour la modélisation de structures en béton, ce cas particulier a été inclus de façon simplifiée.

Dans tous les cas, le tirant reste en stade I jusqu'à l'apparition de la première fissure (éq. 3.4). Ensuite le comportement dépend de la quantité d'armature (fig. 3.10). En aucun cas l'effort normal après fissuration ne peut dépasser l'effort de plastification des armatures.

$$N = EA_I \cdot \varepsilon \quad \text{si} \quad \varepsilon \le \varepsilon_{sr1} = \frac{f_{ct,5\%}}{E_c^*} \tag{3.4}$$

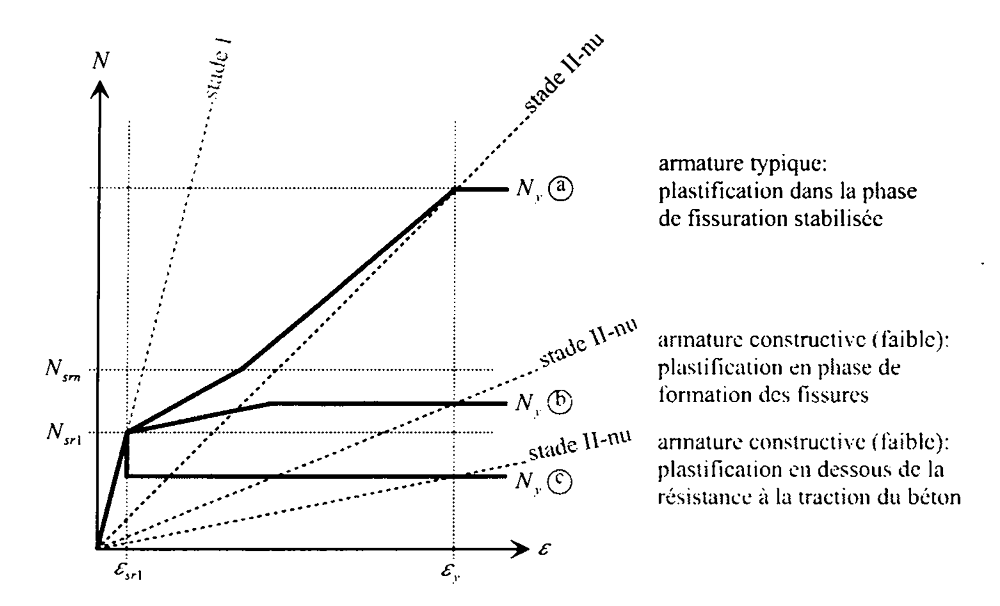


Figure 3.10: Différents comportements selon le taux d'armature

Pour les cas où l'armature est très faible ou inexistante, une résistance résiduelle a été admise. Elle a été définie comme une fraction de la résistance à la traction du béton, ou plus exactement de l'effort normal correspondant à l'apparition de la première fissure (fig. 3.11). Cette valeur constitue une borne inférieure en dessous de laquelle la résistance à la traction du tirant fissuré ne peut pas descendre.

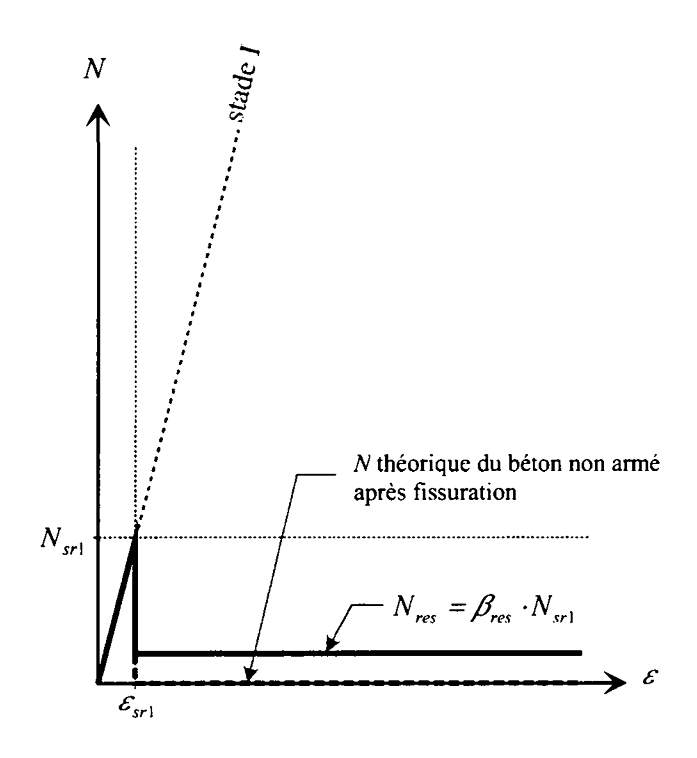


Figure 3.11: Résistance résiduelle admise d'un tirant non armé après fissuration

Dans une structure convenablement dimensionnée, les zones concernées par un tel comportement sont rares. Des zones faiblement armées (armatures constructives) peuvent être plus fréquentes et présenter un comportement similaire (fig. 3.10c). L'une comme l'autre

n'ont que peu d'influence sur le comportement global de la structure. Les déformations y sont contrôlées par des zones plus fortement armées situées à proximité. Néanmoins, ce critère de résistance résiduelle permet notamment de contourner les problèmes numériques que poseraient des zones de rigidité nulle dans la structure.

3.2.4 Formulation de la loi du tirant modifiée (LTM)

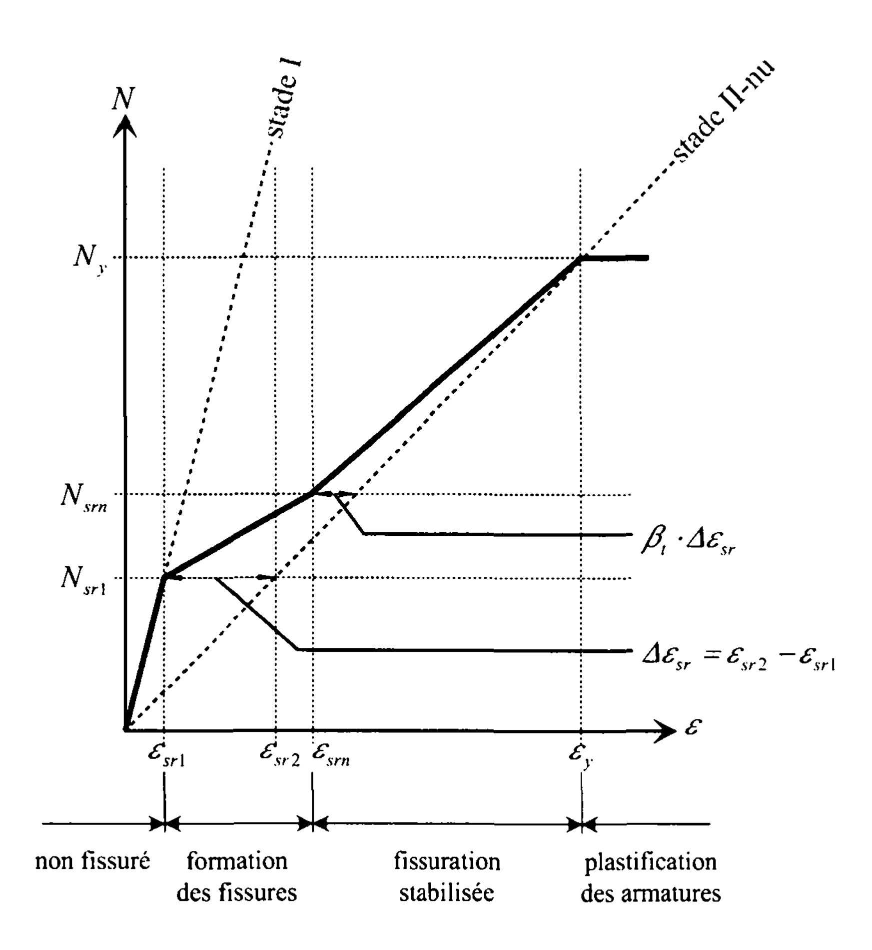


Figure 3.12: Loi du tirant modifiée (LTM)

Phase non fissurée (stade I, y compris compression linéaire)

$$N = EA_I \cdot \varepsilon \quad \text{si} \quad \varepsilon < \varepsilon_{sr1} \tag{3.5}$$

avec $\varepsilon_{sr1} = k \cdot f_{ct,5\%} / E_c$ (3.6)

k = facteur de réduction de la résistance à la traction du béton pour les charges de longue durée

= 1.0 pour les charges de courte durée

= 0.7 à 0.8 pour les charges de longue durée, selon l'équation 3.7

$$= \frac{8.69 - \log_{10} t}{14.46} \not< 0.7 \quad (t = \text{durée de chargement en jours}) \qquad (3.7)$$

Phase de formation des fissures

$$N = N_{sr1} + \frac{N_{sm} - N_{sr1}}{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{sr1}} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{sr1}) \quad \text{si} \quad \varepsilon_{sr1} < \varepsilon < \varepsilon_{sm} \qquad (3.8)$$

avec

$$N_{sr1} = \varepsilon_{sr1} \cdot EA_I \quad \text{(apparition de la première fissure)} \qquad (3.9)$$

$$N_{sm} = N_{sr1} \cdot f_{ct,95\%} / f_{ct,5\%} \quad \text{(apparition de la dernière fissure)} \qquad (3.10)$$

$$\varepsilon_{sr2} = N_{sr1} / EA \qquad (3.11)$$

$$\varepsilon_{sm} = N_{sm} / EA_{II} - \beta_t \cdot (\varepsilon_{sr2} - \varepsilon_{sr1}) \qquad (3.12)$$

$\beta_t = 0.40$ pour la première mise en charge

$\beta_t = 0.25$ pour un chargement à long terme ou cyclique

Phase de fissuration stabilisée

$$N = N_{sm} + \frac{N_y - N_{sm}}{\varepsilon_y - \varepsilon_{sm}} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{sm}) \quad \text{si} \quad \varepsilon_{sm} < \varepsilon < \varepsilon_y \qquad (3.13)$$

avec

$$\varepsilon_y = f_y / E_s \qquad (3.14)$$

$$N_y = f_y \cdot A_s \qquad (3.15)$$

Phase de plastification des armatures

$$N = N_y \quad \text{si} \quad \varepsilon_y < \varepsilon \qquad (3.16)$$

Contrôle de plastification pour les faibles taux d'armature

$$\text{Si} \quad \varepsilon > \varepsilon_{sr1} \quad \text{et} \quad N_y < N_{sr1} \quad \text{alors } N \not> N_y \qquad (3.17)$$

Contrôle du respect de la résistance résiduelle admise

$$\text{Si} \quad \varepsilon > \varepsilon_{sr1} \quad \text{alors} \quad N \not< N_{res} = \beta_{res} \cdot N_{sr1} \qquad (3.18)$$

La constante β_{res} représente la contribution du béton non fissuré dans les zones peu ou non armées. Une valeur raisonnable a été obtenue par calibration du modèle numérique (§3.3).

$$\beta_{res} = 0.12 \qquad (3.19)$$

Notations

f_{ct} = valeur moyenne de la résistance à la traction du béton

$f_{ct,5\%} = 0.75 \cdot f_{ct}$ (fractile 5%)

$f_{ct,95\%} = 1.25 \cdot f_{ct}$ (fractile 95%)

A_c = aire brute de béton

A_s = aire d'acier d'armature

E_c = $E_c(t)$ module d'élasticité apparent du béton

E_s = module d'élasticité de l'acier

EA_I = $E_c \cdot (A_c - A_s) + E_s \cdot A_s$ rigidité apparente de la section en stade I

EA_{II} = $E_s \cdot A_s$ rigidité apparente de la section en stade II-nu

N = effort normal dans la section de béton armé

ε = déformation moyenne dans la section

3.2.5 Zone efficace pour l'application de la loi du tirant

Cette adaptation ne touche pas directement la loi du tirant elle-même, mais la zone efficace sur laquelle elle doit être appliquée. Ce concept a déjà été utilisé dans des contextes similaires (Favre [31], Braam [12]). Il figure également dans le Code Modèle 90 CEB-FIP dont est dérivée la formulation ci-dessous. La formulation générale de la loi du tirant s'applique à des sections où les armatures sont réparties de façon à ce que la résistance de toute la section soit mobilisée. Cela est vérifié, par exemple, si on considère comme un tirant la zone armée située au bas d'une section en T (fig. 3.13). Dans un tel cas, les barres sont relativement serrées, ce qui favorise la mobilisation du béton autour des armatures.

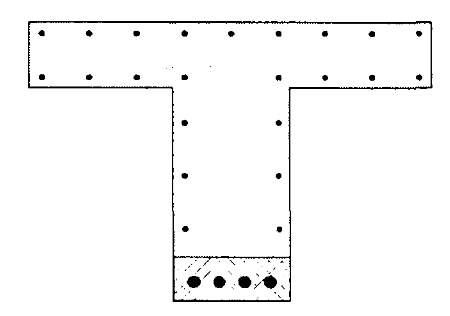


Figure 3.13: Zone entourant l'armature principale d'une section en T, pouvant être considérée comme un tirant

Si les barres d'armatures sont plus espacées, le béton sera moins bien sollicité. La participation du béton tendu ne se manifestant que par l'interaction acier-béton, les zones de béton trop éloignées des armatures deviennent inactives dès qu'elles sont fissurées, si on

néglige le comportement iso-adoucissant. D'où la nécessité d'introduire une zone efficace autour des barres d'armatures pour l'application de la loi du tirant (fig. 3.14).

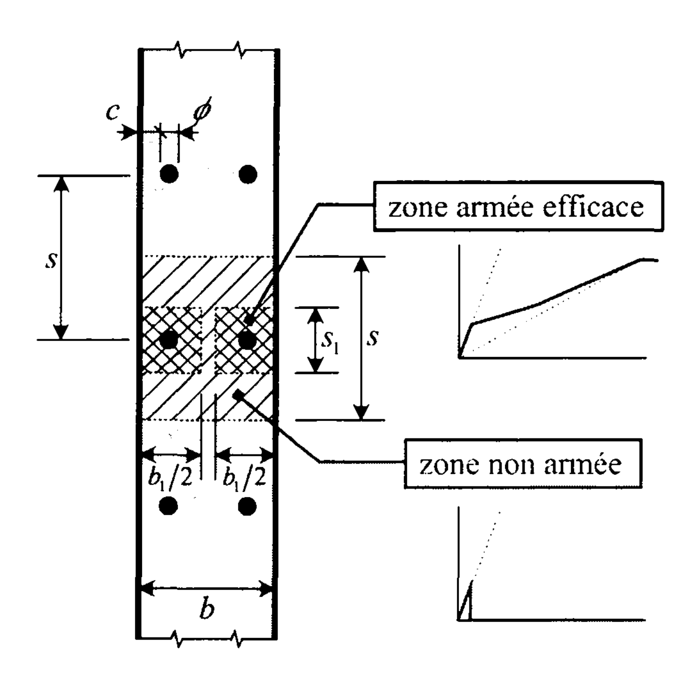


Figure 3.14: Principe de définition de la zone efficace pour l'application de la loi du tirant

Dans la direction de l'épaisseur de la paroi de béton considérée, le Code Modèle 90 CEB-FIP [17] donne, pour 2 nappes d'armatures :

$$b_1/2 = 2.5 \cdot \left(c + \tfrac{1}{2}\phi\right) \not> b/2 \tag{3.20}$$

Par analogie, on généralise aux deux directions et à un nombre quelconque de nappes :

$$b_1 = n \cdot 2.5 \cdot \left(c + \tfrac{1}{2}\phi\right) \not> b \tag{3.21}$$

$$s_1 = 2.5 \cdot \left(c + \tfrac{1}{2}\phi\right) \not> s \tag{3.22}$$

avec
- b = épaisseur de la paroi
- s = écartement des barres
- b_1 = épaisseur efficace
- s_1 = hauteur de la zone efficace dans le plan de la paroi
- c = enrobage
- ϕ = diamètre des barres
- n = nombre de nappes d'armatures – habituellement 2

D'où, pour le calcul de la loi du tirant, une aire de béton efficace qui se calcule de la manière suivante :

$$A_{c,eff} = A_{c,brut} \cdot \frac{b_1}{b} \cdot \frac{s_1}{s} \tag{3.23}$$

Toujours avec les conditions imposées par les équations 3.21 et 3.22 :

$$\frac{b_1}{b} \ngtr 1 \quad \text{et} \quad \frac{s_1}{s} \ngtr 1 \tag{3.24}$$

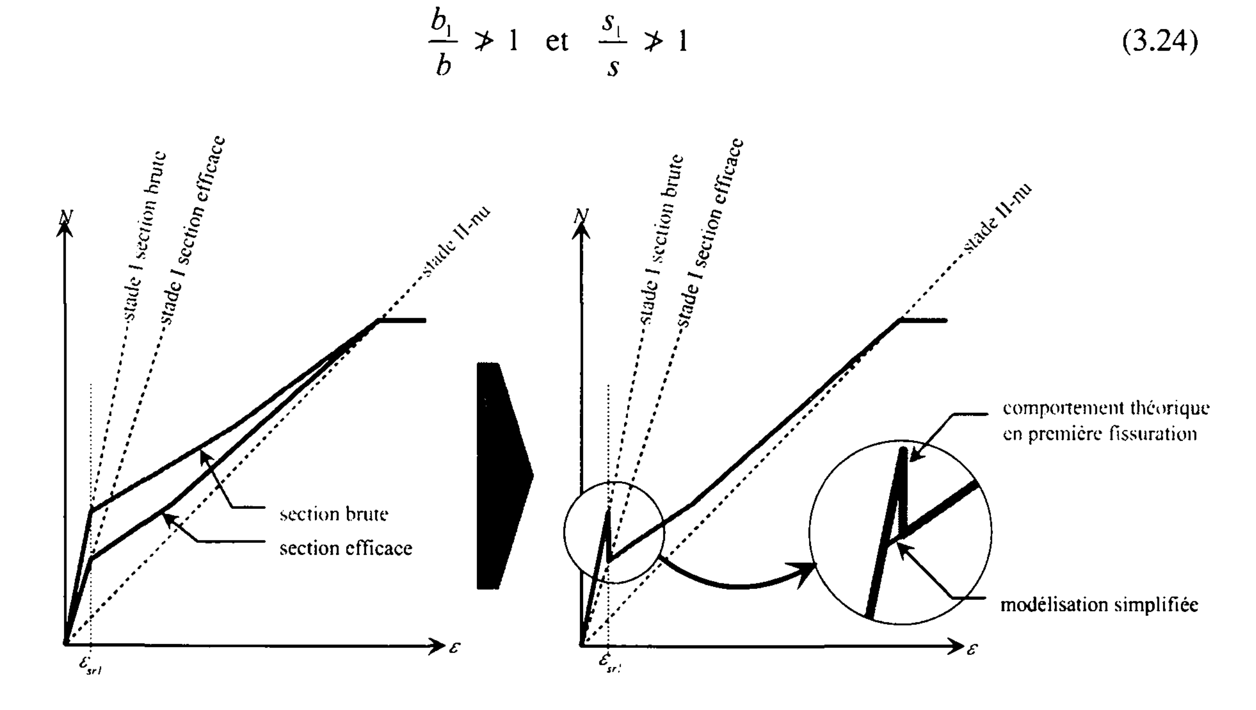


Figure 3.15: Influence de la prise en compte de la zone efficace pour l'application de la loi du tirant

La zone non armée (voir fig. 3.14) est traitée comme un matériau fragile. Dès la première fissuration atteinte, la résistance à la traction du béton hors zone efficace tombe à zéro, ce qui conduit au comportement global décrit à la figure 3.15. Le pic de résistance qu'on voit dans l'encadré peut être observé expérimentalement, mais en pratique, la préfissuration va gommer tout ou partie de ce pic, ce qui amène naturellement la modélisation simplifiée de l'encadré, où il n'apparaît plus du tout.

En résumé, le calcul d'un tirant en béton armé à l'aide de ce modèle de calcul se déroule en 4 étapes :

- Détermination de la section efficace (§ 3.2.5)
- Calcul de la section efficace selon la loi du tirant modifiée (§ 3.2.4)
- Ajout de la contribution de la zone non armée si la section n'est pas fissurée (fig. 3.14)
- Contrôle de la résistance résiduelle **par rapport à la section totale** (fig. 3.11). Le critère de résistance résiduelle n'est pas rattaché à la zone efficace car il ne dépend pas de l'armature. Il n'est défini qu'en fonction de la section de béton.

Si ce concept est appliqué par exemple à la partie inférieure d'une section en T (fig. 3.16), on constate que les armatures principales, du fait de leur concentration, ne subissent pas de réduction de zone efficace. Par contre, les armatures constructives, étant à la fois de plus petit diamètre et plus espacées, ont une forte réduction de zone efficace.

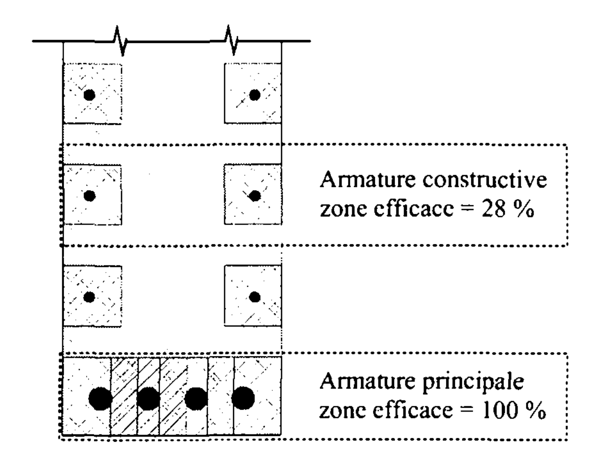


Figure 3.16: Exemple d'application de la définition de zone efficace. Cas de la zone inférieure d'une section en T

3.3 Validation par application au calcul flexionnel – Alphaflex

Un modèle de tirant peut être utilisé de différentes manières pour le calcul d'éléments de structure en flexion (simple ou composée). La manière la plus conventionnelle est de décomposer la section étudiée en une zone comprimée et une zone tendue et de considérer simplement un couple de forces et leur bras de levier pour déterminer le comportement de la section en appliquant la loi du tirant au membre tendu (fig. 3.17). Cette méthode convient bien pour des sections rectangulaires ou en T, mais ne permet évidemment pas de calculer aisément des sections de forme quelconque, du moins pas de façon évidente. Un autre problème réside dans la détermination de la hauteur des deux membrures. La simplicité de la méthode en fait néanmoins un outil idéal pour le calcul manuel, moyennant certaines hypothèses simplificatrices concernant les problèmes précités.

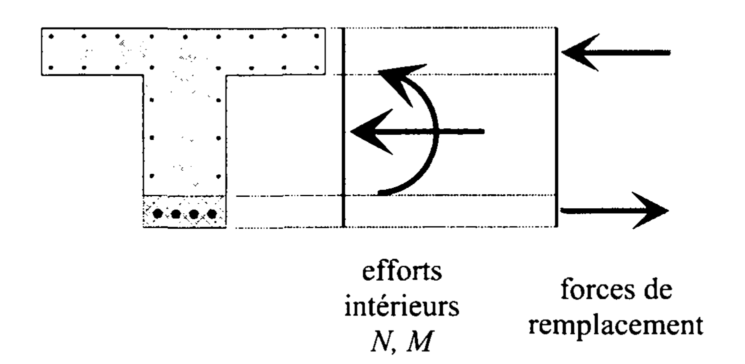


Figure 3.17: Modélisation d'une section fléchie par deux zone soumises à un effort normal pur et séparées par un bras de levier

Plutôt que de décomposer l'élément de structure en seulement deux membrures, l'approche utilisée ici consiste à discrétiser la section en tranches relativement fines, et à utiliser la loi du tirant non plus comme loi de comportement d'un élément de structure, mais plutôt comme

« loi constitutive du matériau béton armé » (fig. 3.18). Cette méthode permet de passer aisément à des sections à axe de symétrie vertical, sans autre limitation de géométrie.

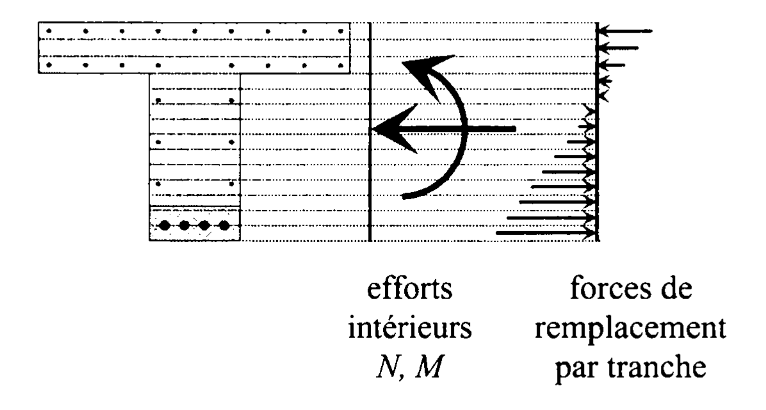


Figure 3.18: Modélisation d'une section fléchie par une série de tranches, chacune étant soumise à un effort normal pur

L'utilisation manuelle de ce type de discrétisation n'est évidemment plus envisageable. C'est pourquoi le logiciel AlphaFlex a été développé, afin de permettre la mise en œuvre des modèles de calcul de sections en BA et BP. Cette étape a été réalisée pour tester et calibrer le modèle de tirant avant son implémentation dans le code de calcul par éléments finis.

3.3.1 Principes généraux et hypothèses d'AlphaFlex

AlphaFlex est un logiciel développé spécialement pour dans le but de tester de nouveaux modèles de calcul pour les sections en BA et BP. Il constitue essentiellement une boîte à outils modulaire, permettant facilement l'implémentation de nouveaux éléments. Les deux principaux éléments sont d'une part un moteur de calcul de section, et d'autre part un générateur de données pour les études paramétriques. A cela s'ajoutent différents modèles de comportement standards qui peuvent servir de base de comparaison pour les modèles à étudier.

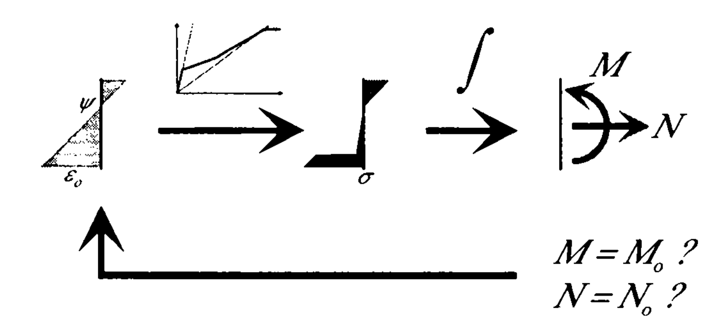


Figure 3.19: Principe général du calcul de section dans AlphaFlex

Le moteur de calcul à été implémenté de façon à permettre l'utilisation de n'importe quelle loi de comportement non-linéaire pour les matériaux. Le principe est un calcul itératif basé sur

une intégration des contraintes sur l'ensemble de la section (fig. 3.19). Aucune hypothèse de linéarisation matérielle n'est utilisée. Seul l'état de déformation de la section fait l'objet d'une simplification, à savoir l'hypothèse de conservation des sections planes (Bernoulli-Navier) et un axe de symétrie vertical. Cet état de déformation peut ainsi être caractérisé par les deux seuls paramètres ε_0 et ψ (allongement au point de référence et courbure). L'intégration des contraintes résultantes donne les efforts. Un calcul itératif permet ainsi de trouver l'état de déformation pour un jeu d'efforts N et M appliqués donné (effort normal et moment de flexion). Pour plus de précisions concernant AlphaFlex, se référer à l'annexe A.1.

En ce qui concerne la géométrie des sections, la discrétisation en tranches (fig. 3.18) permet le calcul de n'importe quelle section à axe de symétrie vertical, le chargement l'étant également. Pour faciliter la saisie des données, une géométrie type en I a été adoptée (fig. 3.20). Elle permet de saisir facilement une grande variété de sections courantes.

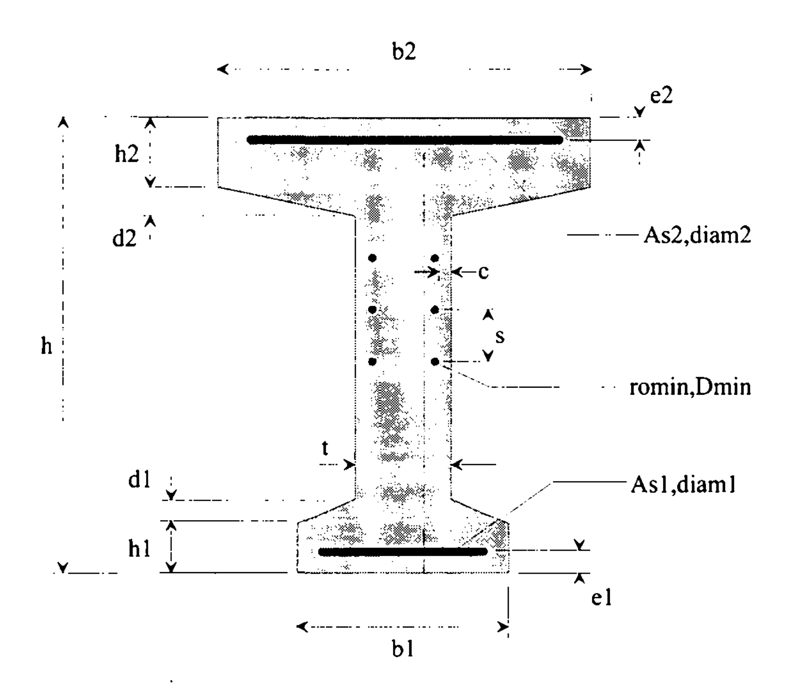


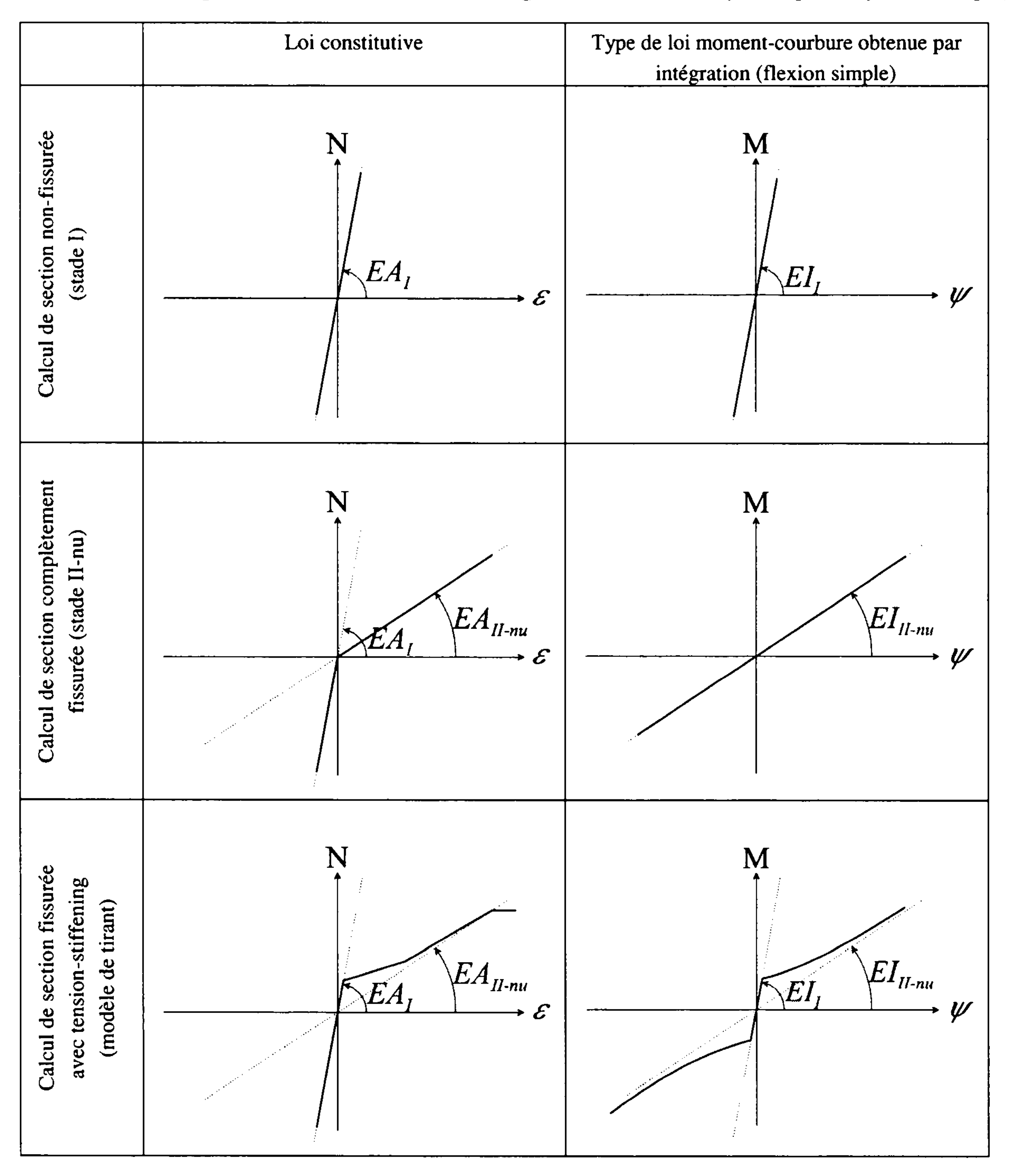
Figure 3.20: Géométrie de la section type en I pour les données d'AlphaFlex et exemples d'application (section rectangulaire, section en T, section de pont caisson)

A ce moteur de calcul s'ajoutent différents aspects et outils. Entre autres :

- Utilisation du logiciel en ligne de commande, ce qui permet une application à de grandes séries de calculs sans intervention de l'utilisateur
- Générateur de données pour les études paramétriques ; le fichier de données est structuré de façon à pouvoir faire varier facilement toutes les quantités. Les différentes valeurs attribuées à chaque paramètre sont spécifiées et le logiciel génère toutes les combinaisons possibles. Il est également possible de définir des dépendances entre certaines variables (p.ex. largeur de la section définie en fonction de sa hauteur)

- Calcul automatique de loi moment-courbure complète sur la base des lois de comportement sélectionnées

Tableau 3.1: Lois constitutives implémentées dans AlphaFlex et LMC correspondantes obtenues par intégration (cas d'une section rectangulaire à armatures symétriques en flexion simple)



3.3.2 Modèles implémentés & lois moment-courbure

La loi du tirant modifiée décrite au paragraphe 3.2 a été implémentée dans AlphaFlex. Afin de comparer les résultats obtenus avec des bases connues, les calculs en stades I et II-nu ont

également été introduits. Chaque tranche de la discrétisation étant traitée comme une section en béton armé soumise à un effort de traction ou de compression pure, on peut, selon le type de calcul effectué, considérer les lois constitutives décrites dans le tableau 3.1. Le calcul d'une section sous flexion simple ou composée se fait par intégration d'une de ces lois de comportement sur l'ensemble de la section. Il est dès lors possible de reconstituer la loi moment-courbure de la section considérée pour un effort normal donné.

3.3.3 Comparaison avec la loi moment-courbure CEB-FIP

3.3.3.1 Loi moment-courbure CEB-FIP (LMC)

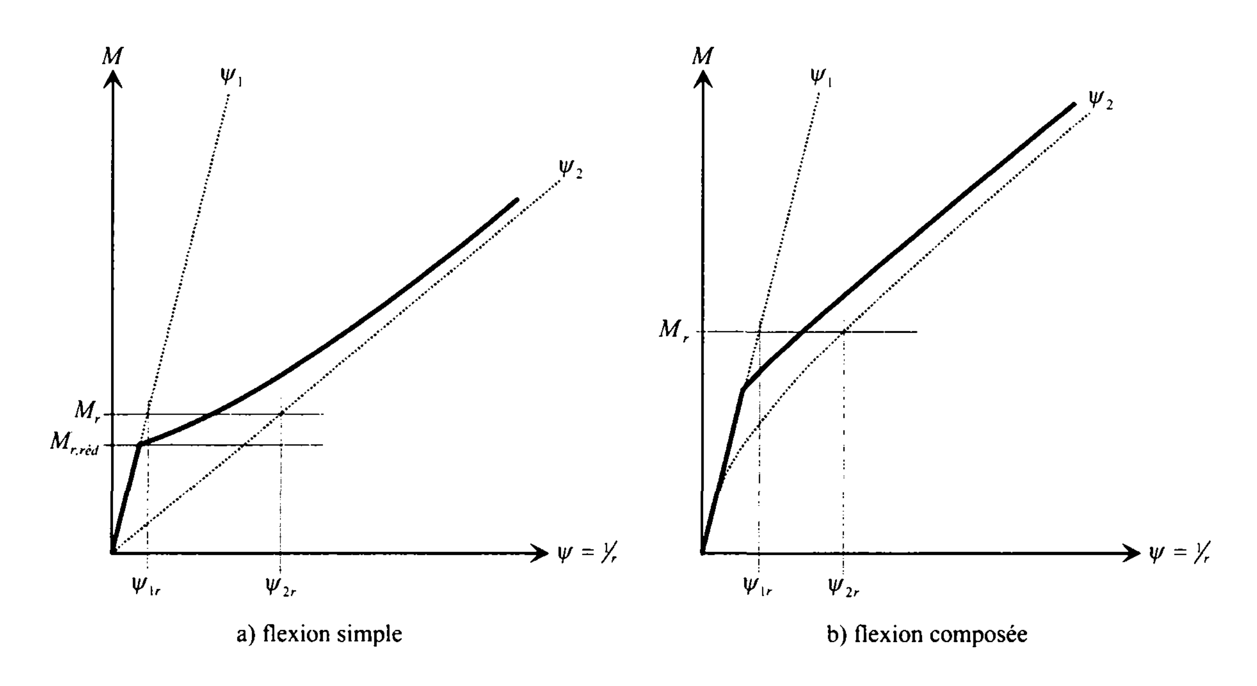


Figure 3.21: Loi moment-courbure CEB-FIP (Code Modèle 90)

La loi moment-courbure CEB-FIP établit une relation entre les efforts appliqués (moment de flexion et effort normal) et la courbure moyenne d'un tronçon de poutre en béton armé à section constante. Elle permet ainsi d'évaluer le comportement d'un élément en BA fissuré. De nombreuses autres formulations ont précédé celle-ci, et d'autres encore sont utilisées dans des codes tels que celui de l'ACI. La formulation retenue ici est celle du Code Modèle 90 [17].

$$\psi_m = \psi_2 - \beta \cdot (\psi_{2r} - \psi_{1r}) \cdot \frac{M_r}{M} \geq \psi_1 \qquad (3.25)$$

avec M, N = efforts appliqués au tronçon considéré

M_r = moment de fissuration de la section soumise à N

ψ_m = courbure moyenne du tronçon de poutre considéré

ψ_1, ψ_2 = courbure en stade I resp. II-nu sous M,N

ψ_{1r}, ψ_{2r} = courbure en stade I resp. II-nu sous M_r, N

β = coefficient de participation du béton tendu entre les fissures

0.8 pour la première mise en charge

0.5 pour des chargements répétés et le long terme

Le moment de fissuration réduit $M_{r,réd}$ (fig. 3.21a) correspond à la prise en compte d'une préfissuration du béton. En flexion simple, on peut démontrer que $M_{r,réd} = \sqrt{\beta} \cdot M_r$.

Cette loi a déjà été testée et utilisée dans la recherche et la pratique. Elle va servir de point de repère pour le calage et la validation de la LTM appliquée au calcul flexionnel.

On peut noter ici une importante différence entre les deux différents modèles (LMC et LT/LTM). La LMC ne comporte *a priori* aucune prise en compte de la réduction de la résistance à la traction du béton pour des charges de longue durée, alors même que les deux modèles sont issus du Code Modèle 90. En fait, la variation de β de 0.8 à 0.5 pour le passage au long terme entraîne une réduction du moment de fissuration réduit. En flexion simple, cette réduction vaut $\sqrt{0.5/0.8} = 0.79$, ce qui correspond approximativement à la réduction de résistance à la traction à long terme selon l'équation 3.7.

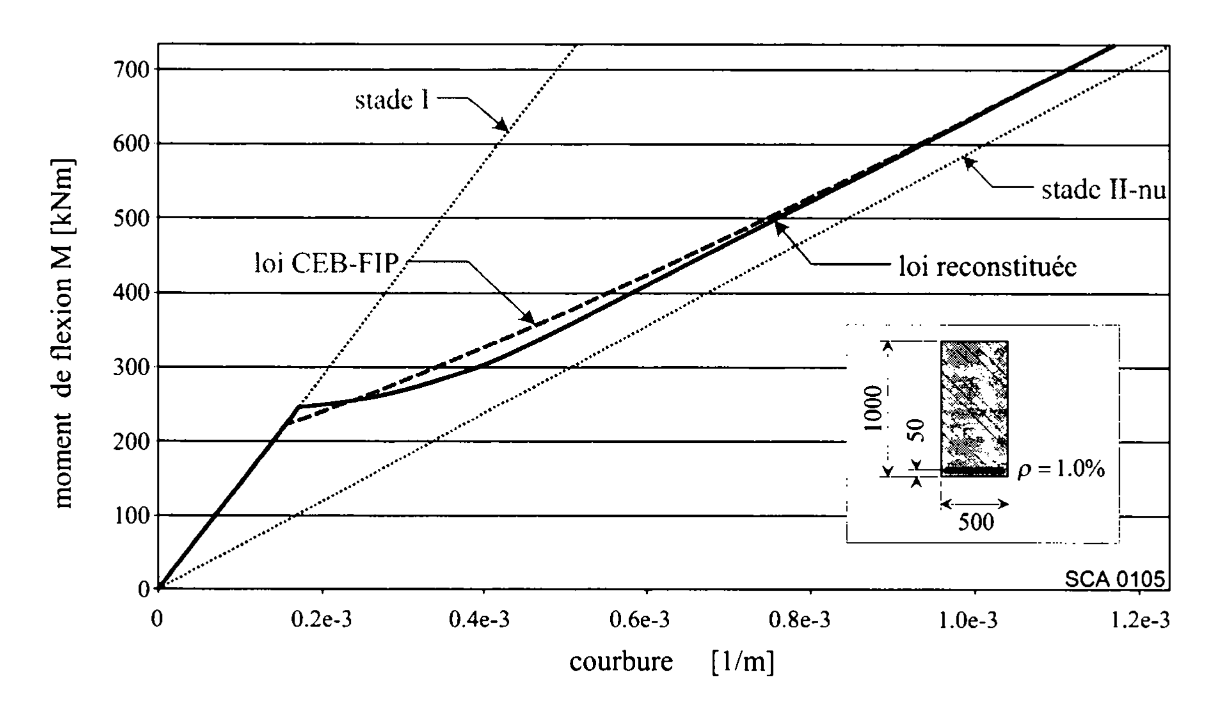


Figure 3.22: Diagramme résultat type pour l'évaluation du modèle de tirant utilisé pour le calcul flexionnel. LMC CEB-FIP et LMC reconstituée par intégration de la LTM sur la section.

3.3.3.2 Critère de comparaison

Afin de pouvoir évaluer facilement la qualité des résultats obtenus par le modèle développé, il était nécessaire de mettre en place un critère simple et objectif. En voyant un diagramme moment-courbure tel que celui de la figure 3.22, le premier réflexe est de calculer l'aire entre les deux courbes obtenues. Si un tel critère est facile à évaluer numériquement, il est très abstrait et difficile à utiliser tel quel.

Le critère de comparaison utilisé dans cette étude est plus concret. Il consiste à calculer la flèche d'une poutre simple en utilisant chacune des deux lois moment-courbure, puis à les comparer. Le coefficient de déviation entre les deux lois est défini comme le rapport de la différence des flèches à la flèche calculée avec la loi CEB-FIP.

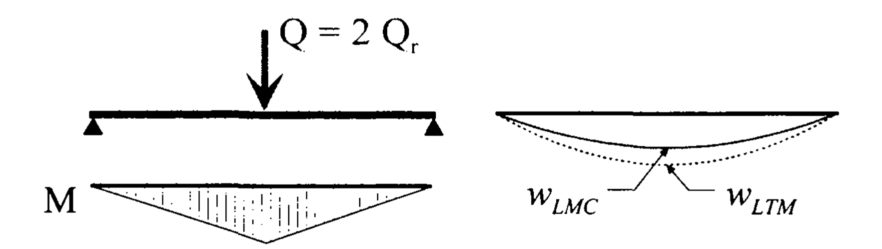


Figure 3.23: Système statique pour le calcul du critère de comparaison des lois moment-courbure

Le système statique utilisé pour le calcul des flèches est décrit à la figure 3.23. Le choix d'une poutre simple s'explique par le fait qu'une section donnée d'une poutre n'est en principe dimensionnée pour reprendre que des moments d'un seul signe.

La charge appliquée a été arbitrairement fixée à 2 fois la charge de fissuration de la section médiane de la poutre. Ce choix permet d'englober dans le critère d'évaluation la zone la plus sensible de la loi moment-courbure, à savoir celle qui entoure le moment de fissuration. Il faut toutefois garder à l'esprit que ce dernier est calculé de la manière classique associée à la LMC (éq. 3.26) et non pas par la méthode de la LTM.

$$M_r = \left(f_{ct} - \frac{N}{A'_c} \right) \cdot W'_c \tag{3.26}$$

A'_c et W'_c étant l'aire respectivement le moment statique transformé de la section. Partant de là, le taux de déviation de la LTM par rapport à la LMC peut être calculé comme suit :

$$\Delta_{dév} = \frac{w_{LTM} - w_{LMC}}{w_{LMC}} \tag{3.27}$$

Ce critère présente l'avantage d'être adimensionnel. De plus, il ne dépend pas de la portée de la poutre considérée. En fait, il n'est fonction que des caractéristiques de la section elle-même et de la distribution de moments choisie – dans notre cas celle correspondant à une charge concentrée.

Comme déjà expliqué, la LMC CEB-FIP constitue un point de référence très commode pour des études paramétriques à grande échelle. Des exemples d'application de ce critère et les lois moment-courbure correspondantes sont donnés aux figures 3.27 et 3.28 ci-après.

Il est clair que, pour avoir une évaluation rigoureuse de la loi moment-courbure reconstituée à partir de la LTM, il faudrait la comparer à des résultats expérimentaux plutôt qu'à un modèle empirique comme la LMC CEB-FIP. Cependant, cela nécessiterait la saisie d'une quantité considérable de données qui ne sont de surcroît pas forcément disponibles. La confrontation à des résultats expérimentaux n'est pas écartée pour autant, mais elle interviendra à un autre stade de cette étude.

3.3.3.3 Sections et paramètres testés

Deux familles de sections ont été testées : des sections rectangulaires et des sections en T. Pour les deux familles on a fait varier les dimensions de la section, les quantités d'armatures passives, ainsi que le niveau de précontrainte (introduite sous la forme d'un effort normal de compression).

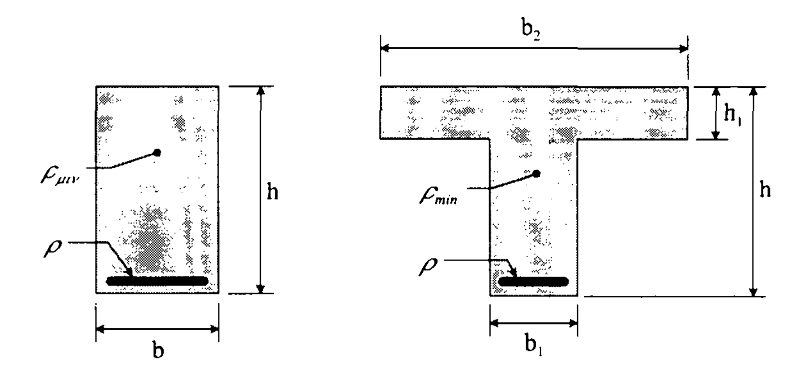


Figure 3.24: Familles de sections calculées à l'aide d'AlphaFlex pour la validation de la LTM

Sections rectangulaires

Pour cette première série de calculs, un certain nombre d'autres paramètres ont également été investigués : résistance à la traction du béton, disposition des armatures constructives, finesse de la discrétisation, coefficients de la loi moment-courbure CEB-FIP et du modèle de tirant. La section de base à les caractéristiques suivantes :

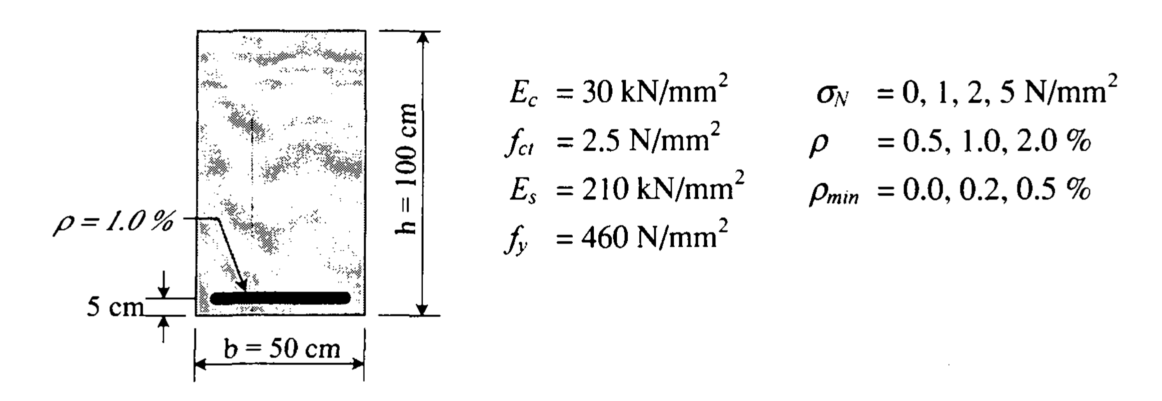
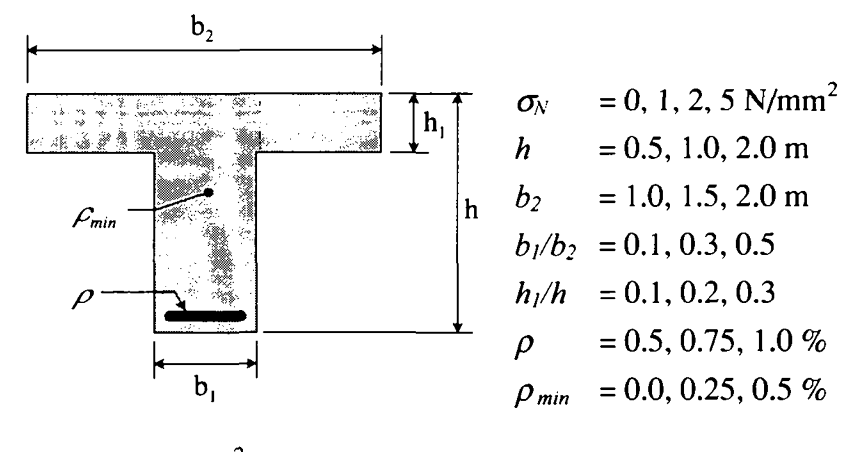


Figure 3.25: Caractéristiques générales pour les sections rectangulaires. Certains paramètres indiqués ici comme constants ont été étudiés séparément.

L'effort normal de compression appliqué à la section pour la prise en compte de la précontrainte est défini par rapport à une estimation du niveau de contrainte dans le béton sous $M = 0$:

$$P = \sigma_N \cdot A_c \qquad (3.28)$$

A_c étant l'aire de béton brute de la section. L'influence de la rigidité de l'armature de précontrainte a été négligée. La précontrainte n'est considérée dans cette série de calculs que comme une charge extérieure.



E_c = 30 kN/mm²
f_{ct} = 2.5 N/mm²
E_s = 210 kN/mm²
f_y = 460 N/mm²

court terme : $\varphi = 0, \beta_t = 0.4, \beta = 0.8, k = 1.0$
long terme : $\varphi = 2, \beta_t = 0.25, \beta = 0.5, k = 0.7$

Figure 3.26: Caractéristiques générales pour les sections en T

Sections en T

Sur la base des résultats obtenus pour les sections rectangulaires, les paramètres variant pour les sections en T ont été limités au niveau de précontrainte, aux quantités d'armatures principale et constructive et à la géométrie de la section. A cela est venu s'ajouter l'effet du temps, matérialisé par différents coefficients dans les deux modèles : coefficient de fluage φ[2], de participation du béton tendu entre les fissures β (loi moment-courbure) ou β_t (loi du tirant) et de réduction de la résistance à la traction du béton sous charge de longue durée k (loi du tirant seulement, fatigue statique). Le moteur de génération de données et le critère de comparaison étant alors en place, une exploration systématique de l'espace des valeurs choisies a été possible.

3.3.3.4 Résultats

Le but de cette partie de l'étude est de décrire le comportement du modèle de calcul développé par rapport à un modèle de référence, en l'occurrence la loi moment-courbure CEB-FIP, plutôt que d'analyser l'influence des différents paramètres sur le comportement des sections en béton. Aussi, les résultats présentés ne concernent-ils que les modèles utilisés eux-mêmes.

On peut d'ores et déjà admettre comme principe général que tout paramètre qui tend à réduire la participation du béton tendu dans la section pour les deux modèles utilisés (LMC et LT/LTM) améliore la concordance entre ces deux modèles. En effet, les zone de béton armé comprimées sont traitées exactement de la même manière, soit en stade I, dans la LMC comme dans la LT. Dans les zones tendues, les armatures utilisent les mêmes lois de comportement dans les deux modèles et donneront donc également les mêmes résultats. Le seul facteur d'incertitude qui subsiste est la participation du béton tendu entre les fissures. Le stade II-nu, ou, ce qui revient au même, une résistance à la traction nulle, est un cas limite pour lequel il est évident que les deux modèles doivent donner rigoureusement les mêmes résultats.

- **Apport des modifications introduites dans la loi du tirant**

L'utilisation de la LT telle que formulée dans le Code Modèle 90 dans un modèle de calcul de section donne des résultats relativement différents de la LMC, quoique d'allure très similaire. Les corrections apportées dans la LTM ont permis d'améliorer sensiblement son comportement vis-à-vis de la LMC de référence. Les modifications ont été introduites en deux

[2] Il ne s'agit pas ici du coefficient de fluage au sens strict. Il peut également inclure le coefficient de vieillissement, selon l'historique de chargement considéré, auquel cas la notation exacte serait $\chi\varphi$.

phases : tout d'abord la prise en compte d'une résistance résiduelle fictive pour les zones tendues non armées, ainsi que la modification de la branche de fissuration stabilisée, et ensuite le concept de zone efficace autour des barres d'armatures qui permet de tenir compte de la disposition de ces dernières à l'intérieur de la section.

La modification de la branche de fissuration stabilisée intervient surtout dans la partie supérieure de la loi moment-courbure (environ entre 0.5 et 1.0 M_u). Elle permet donc d'améliorer le comportement du modèle pour des niveaux de sollicitations relativement élevés.

La résistance résiduelle des zones non armées, elle, est mobilisée dès le début de la fissuration. Elle permet d'une part de simplifier la saisie des données en autorisant l'introduction des seules armatures statiquement nécessaires, et d'autre part de contourner les problèmes numériques posés par des zones de rigidité nulle dans un modèle de calcul par éléments finis. La figure 3.27 montre l'amélioration apportée par la LTM. Il s'agit ici du cas d'une section en T sans armature constructive. En conséquence, la correction apportée par la LTM par rapport à la LT provient essentiellement de la résistance résiduelle de la zone non armée tendue.

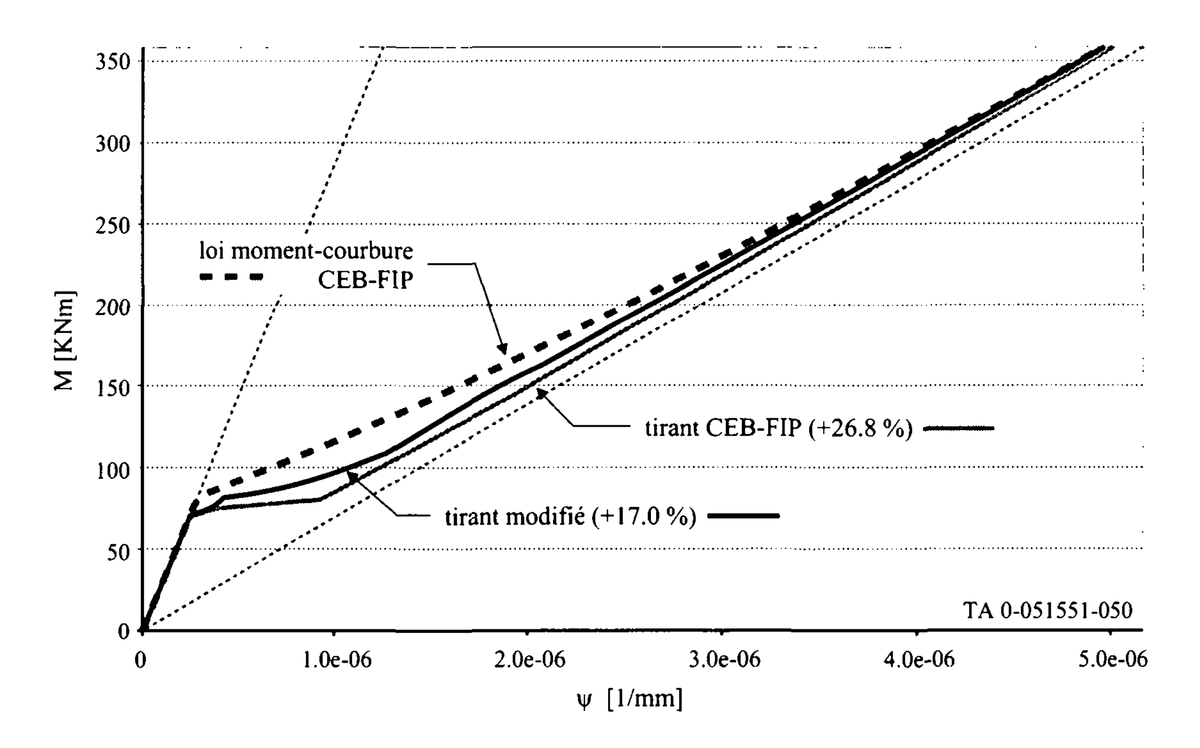


Figure 3.27: Loi moment-courbure reconstruite (coefficients de déviation des lois reconstruites mentionnés entre parenthèses)

Pour des sections où l'armature constructive est effectivement introduite, la résistance résiduelle fictive est généralement inférieure à celle de ces armatures et n'est donc pas mobilisée. Par contre, si tout le béton est pris en compte dans cette zone où il n'y a que de l'armature constructive, on introduit dans le modèle une importante surrigidité, comme cela

apparaît clairement à la figure 3.28. Dans le cas de cette section en T avec armature constructive, c'est le critère de zone efficace qui apporte la quasi-totalité de la correction.

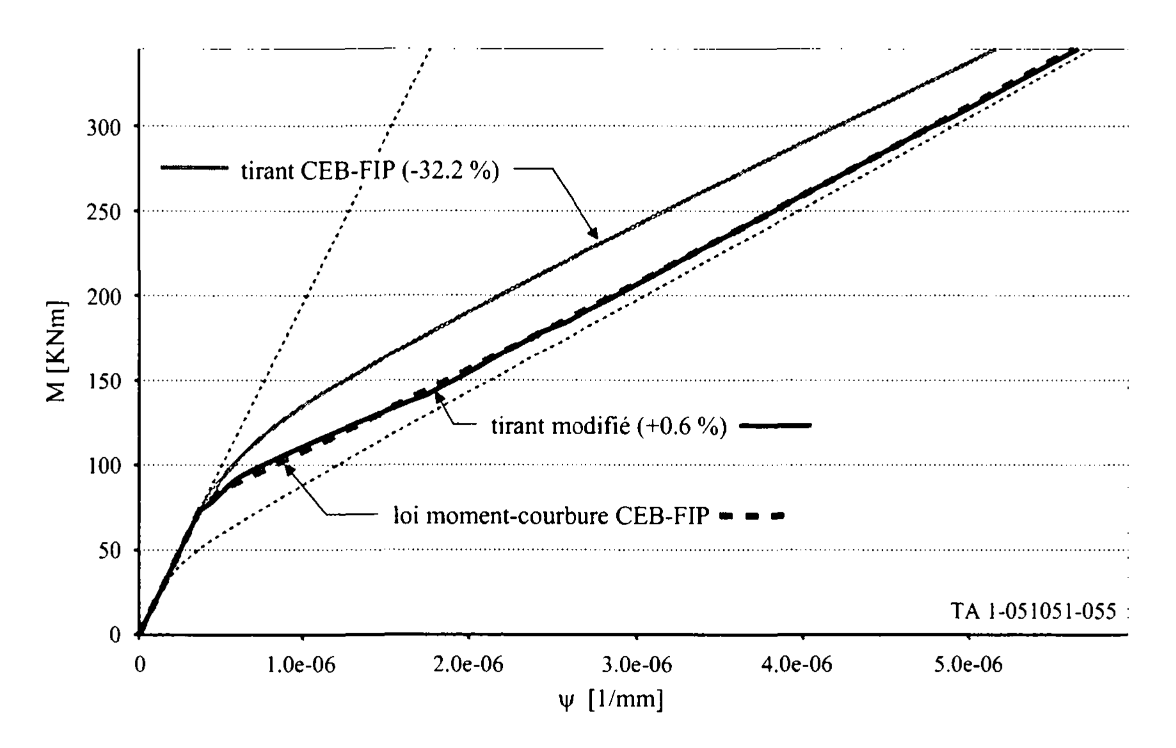


Figure 3.28: Loi moment-courbure reconstruite (coefficients de déviation des lois reconstruites mentionnés entre parenthèses)

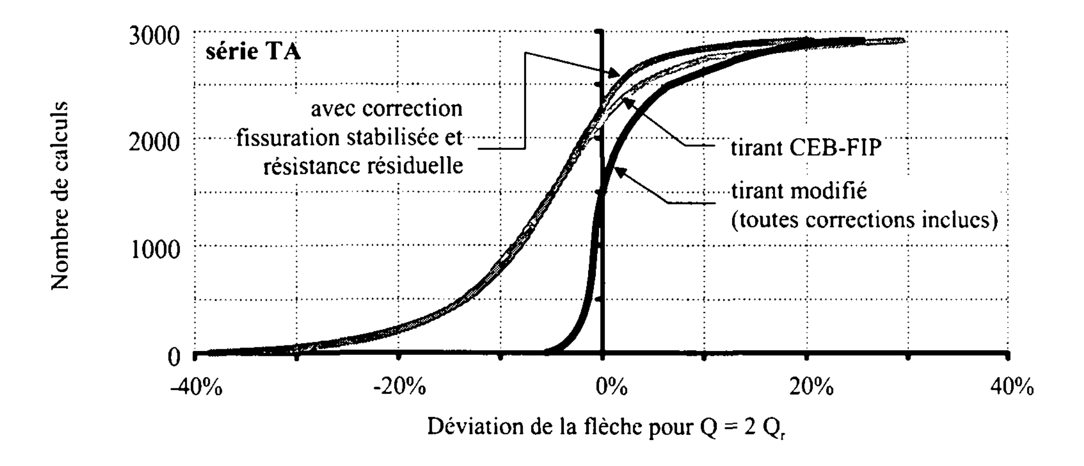


Figure 3.29: Distribution cumulée de la déviation pour la série TA (sections en T, court terme). Distributions pour les différents stades de correction de la loi du tirant

Considérant les résultats d'une façon plus globale, les figures 3.29 et 3.30 présentent l'ensemble de la série TA (sections en T, calcul à court terme). La LT donne des déviations échelonnées entre –40% et +30%. Les sections trop rigides (valeurs négatives, sous-estimation de la flèche) sont généralement les sections précontraintes, tandis que celles qui sont trop souples sont les sections simplement armées. On voit que la première correction (résistance résiduelle et branche de fissuration stabilisée) agit sur les sections trop souples, d'une façon relativement modeste, les corrections pouvant tout de même aller jusqu'à 10%.

La seconde correction (zone efficace) agit dans le sens contraire, essentiellement sur les sections avec armatures constructives, ramenant le domaine de variation de –5% à +25%.

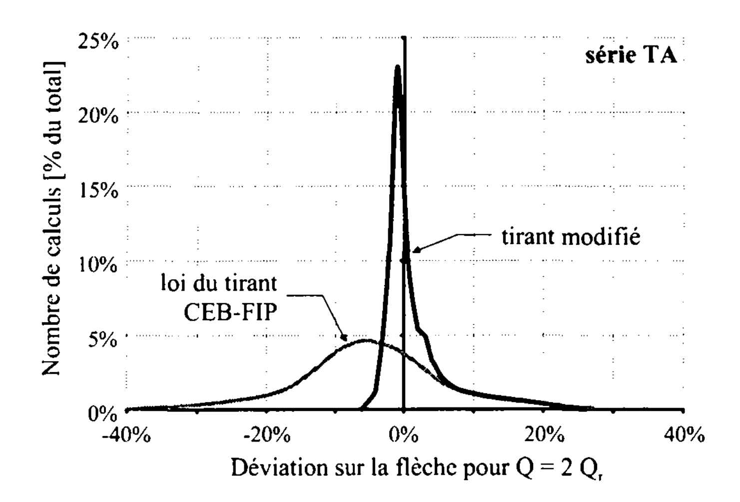


Figure 3.30: Densité de distribution de la déviation pour la famille de sections en T (série TA, court terme) en % du nombre total de calculs par % de déviation.

- **Précontrainte / effort normal**

D'une manière générale et comme déjà expliqué plus haut, tous les paramètres qui tendent à réduire la part de déformations due au stiffening *dans les deux modèles* (LMC et LTM) améliorent leur concordance. Les deux paramètres qui ont le plus d'influence sont le niveau de précontrainte et le taux d'armature principale.

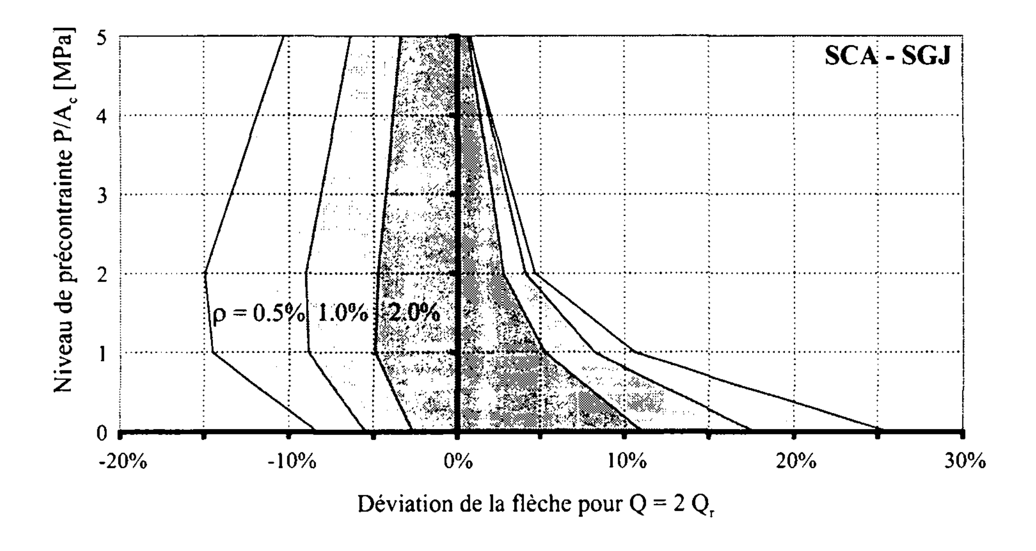


Figure 3.31: Domaine de variation de la déviation de la flèche pour les sections rectangulaires (séries SCA à SGJ, court terme) en fonction du niveau de précontrainte et du taux d'armature principale

Les figures 3.31 et 3.32 montrent le domaine de variation de la déviation de la LTM en fonction du niveau de précontrainte et du taux d'armature principale. On voit bien que l'étendue du domaine de variation diminue fortement (jusqu'à un facteur 5 pour les sections en T) lorsque le niveau de précontrainte augmente. L'effet particulièrement favorable de la précontrainte a plusieurs origines.

- L'effort normal de compression réduit la hauteur de béton tendu, zone où intervient sa participation à la rigidité, d'où réduction de l'imprécision.
- L'effort normal augmente sensiblement le moment de fissuration, ainsi que la courbure correspondante en stade homogène. L'erreur relative sur la courbure et la rigidité apparente est donc plus faible.

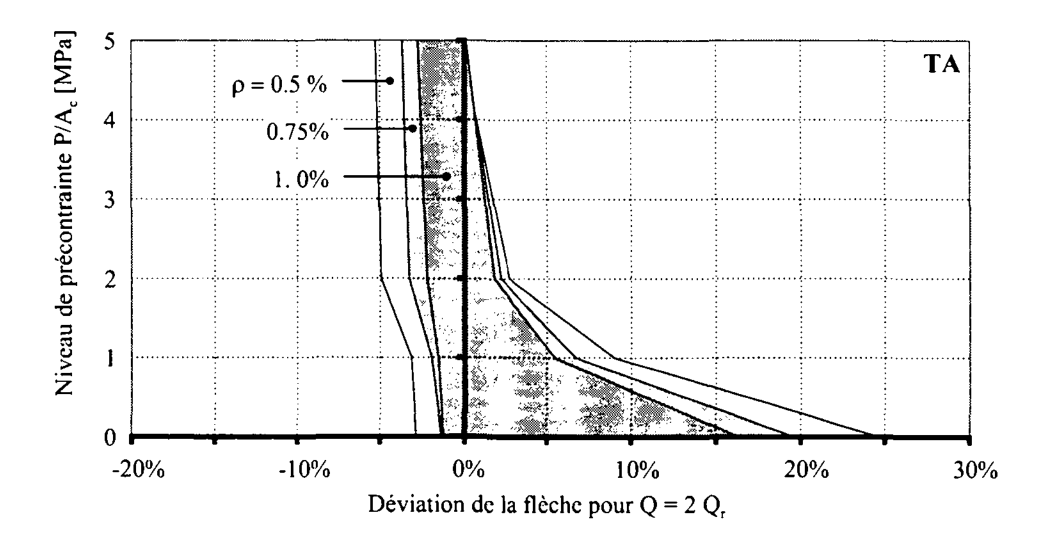


Figure 3.32: Domaine de variation de la déviation de la flèche pour les sections en T (série TA, court terme) en fonction du niveau de précontrainte et du taux d'armature principale

- **Armature principale**

Le taux d'armature principale a également une influence non négligeable sur le comportement de la LTM. Toujours dans les figures 3.31 et 3.32, on voit bien qu'une armature principale plus importante augmente la concordance des deux modèles. Cet effet est particulièrement marqué pour les section rectangulaires, pour lesquelles la zone de béton tendu est très importante en regard de la zone de béton comprimé. La zone de la section touchée par l'augmentation d'armature principale est donc proportionnellement beaucoup plus importante que pour les sections en T. Pour ces dernières, l'armature est concentrée sur une faible largeur de béton au bas de l'âme.

Ce point amène une remarque concernant la précontrainte. L'aire de l'acier de précontrainte a été négligée dans tous les calculs effectués dans ce chapitre. Cependant, les conclusions de ce paragraphe indiquant que la prise en compte d'armatures supplémentaires doit nécessairement

améliorer le comportement du modèle, il n'est pas jugé utile de pousser plus avant cette partie de l'étude.

- **Géométrie de la section**

A nouveau, une réduction de la zone de béton tendu améliore la concordance des deux modèles. Ainsi, une plus grande dispersion des résultats a été observée pour les sections les plus trapues, les sections rectangulaires venant en tête. Dans ce contexte, une section *trapue* se réfère à une géométrie qui implique que la zone de béton tendu représente une importante proportion de la section totale. De ce point de vue, une section rectangulaire haute et étroite doit également être considérée comme trapue. Pour les sections en T, la dispersion des résultats augmente avec la largeur de l'âme. Néanmoins, les variations de déviation sont nettement moins spectaculaires que les valeurs observées pour les deux premiers paramètres (précontrainte et armature principale), soit moins de 10 %, l'armature principale et le niveau de précontrainte étant fixé.

Les sections à parois minces seront donc naturellement sujettes à de plus faibles déviations – toujours en comparaison à la LMC. Si l'on considère une paroi porteuse, on aura affaire à une section trapue selon nos critères, ce qui n'est pas favorable du point de vue du critère de comparaison défini. Cependant ce type d'élément structural n'est pas assimilable à une poutre et ne peut plus être traité simplement à l'aide de la LMC. De plus, les effets de cisaillement membranaire pouvant être prépondérants, la simple discrétisation en tranches utilisée dans ce chapitre n'est plus applicable.

- **Armature constructive**

Les trois premiers paramètres traités – précontrainte, armature principale et géométrie de la section – sont les plus importants quant à leur influence sur la LTM. Pour les paramètres suivants, les résultats sont nettement moins marqués et les variations de déviation observées ne dépassent pas la barre des 5%.

Les armatures constructives influencent donc peu les résultats finaux. Cependant, le comportement interne du modèle peut être fort différent selon la présence ou non d'armature constructive. En effet, comme décrit plus haut, dans une section sans armature constructive, les zones non armées sont traitées comme ayant une résistance résiduelle fictive après fissuration. Par contre, si une armature constructive est mise en place, elle est traitée comme n'importe quelle armature, à ceci près que sa disposition – généralement plutôt espacée – fait que sa zone efficace est très réduite (figure 3.16). Du fait des plutôt faibles sections d'acier utilisées, la quantité d'armature constructive n'a que peu d'influence sur le comportement du modèle.

- **Résistance à la traction du béton**

La valeur de la résistance à la traction du béton n'influence pas la concordance des 2 modèles. Les résultats présentés dans les paragraphes précédents ont tous été calculés pour $f_{ct} = 2.5$ N/mm^2. Les variations du coefficient de déviation observées pour d'autres valeurs de f_{ct} ne dépassaient jamais 1%.

Ajoutons à cela qu'il est évident qu'une résistance à la traction nulle entraîne nécessairement une parfaite concordance des deux modèles. La participation du béton tendu est alors éliminée du problème et toute section est calculée en stade II-nu, quelle que soit la méthode utilisée.

- **Discrétisation / effets d'échelle**

La plupart des effets d'échelle liés à la discrétisation de la section (épaisseur des tranches utilisées) ont pu être éliminés grâce à la formulation de la LTM. Notamment, toutes les considérations liées à la zone efficace des barres d'armatures ont été traités en termes de densité et non pas de sections, c'est-à-dire sous une forme continue plutôt que discrète. Les quantités d'armatures sont définies en tant que taux d'armatures et les réductions de zone efficace sont calculées en fonction de l'écartement des barres. Ceci convient bien pour les armatures réparties – dans le cas particulier, les armatures constructives.

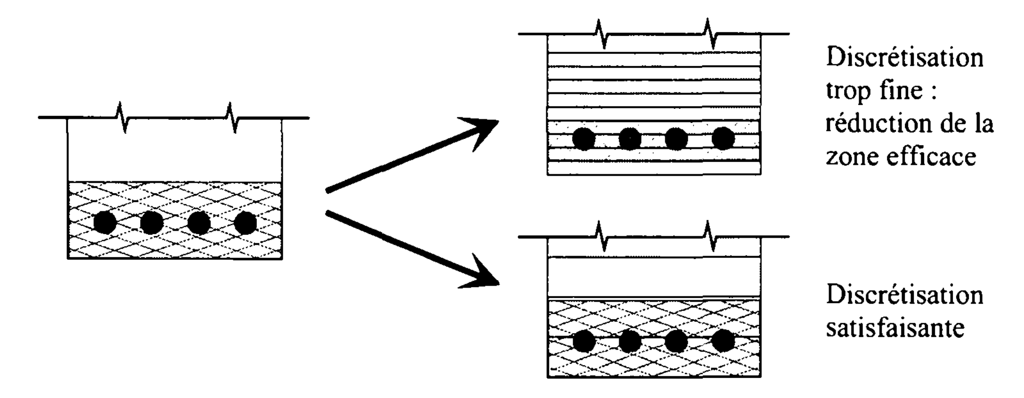


Figure 3.33: Effet d'échelle dû à une discrétisation trop fine. La zone efficace des armatures est tronquée par les limites de tranches.

Dans le type de calculs effectués dans ce chapitre, on se trouve néanmoins en présence d'une armature principale de flexion qui est concentrée dans le bas de la section. Ceci pose évidemment un problème pour l'application de la LTM : la participation du béton tendu ne sera activée dans une tranche donnée de la discrétisation que s'il s'y trouve une certaine quantité d'armature. Il est clair que l'effet rigidifiant du béton sur cette armature n'agira qu'à l'intérieur de cette même tranche (fig. 3.33). Le béton des tranches adjacentes ne joue aucun

rôle direct dans la LTM. Ceci implique que la zone efficace d'une armature donnée doit impérativement être complètement englobée par la tranche contenant l'armature.

La figure 3.34 montre que les sections avec une discrétisation trop fine sont plus souples au voisinage du moment de fissuration. Si le comportement semble meilleur au moment où la courbure quitte le stade I pour la discrétisation en 100 tranches, le déficit de rigidité n'est néanmoins jamais comblé. La discrétisation plus grossière en 10 tranches a un comportement moyen plus satisfaisant. Il est néanmoins rassurant de constater que les valeurs de déviation restent faibles.

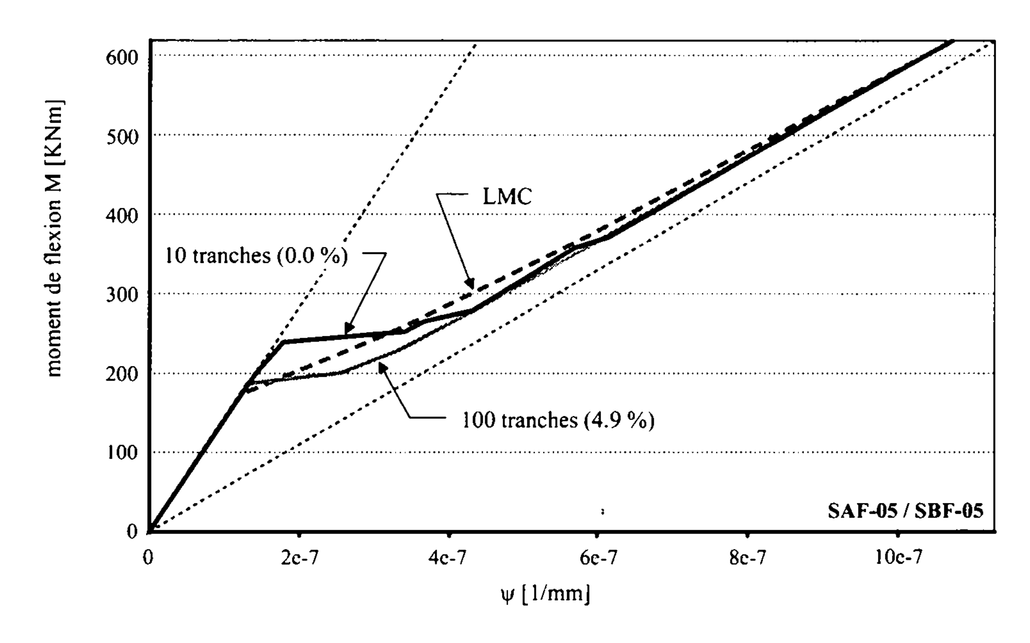


Figure 3.34: Influence de la discrétisation sur la loi moment-courbure reconstruite (coefficients de déviation pour $Q=2Q_r$ indiqués entre parenthèses). Cas d'une section rectangulaire.

A l'opposé, chaque tranche étant calculée comme un tirant, cela revient à considérer que les contraintes sont constantes sur l'épaisseur d'une tranche – si tant est qu'on puisse encore parler de contraintes dans le milieu hétérogène qu'est un tirant en béton armé. Il convient d'adopter une discrétisation suffisamment fine afin de représenter correctement les variations de contraintes sur la hauteur de la section. En l'occurrence, une subdivision en 10 tranches semble largement suffisante pour résoudre tous les cas rencontrés. Le problème se pose d'une manière très différente en ce qui concerne la modélisation par éléments finis.

- **Long terme**

Le fluage tend à réduire la rigidité apparente du béton. En pratique, il est introduit dans le différents modèles sous la forme d'un module ajusté, plus faible que le module d'élasticité instantané. Donc, la rigidité apparente du béton diminuant, la part de rigidité due aux armatures augmente, ce qui occasionne encore une fois une réduction de la part due au béton tendu. Etant donné que le fluage a été introduit par le biais d'un module ajusté, on peut

également en déduire qu'une variation du module d'élasticité du béton aurait les mêmes effets que le fluage sur le comportement du modèle – dans une moindre mesure, les incertitudes sur le module d'élasticité étant plus faibles que celles liées au coefficient de fluage.

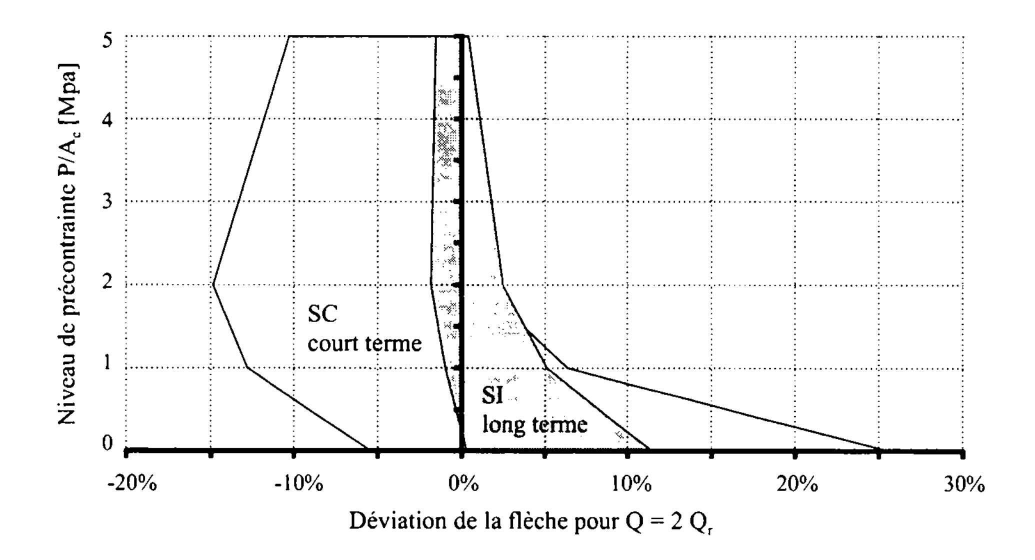


Figure 3.35: Domaine de variation de la déviation de la flèche pour les sections rectangulaires (séries SCx et SIx) en fonction du niveau de précontrainte pour le court terme et le long terme.

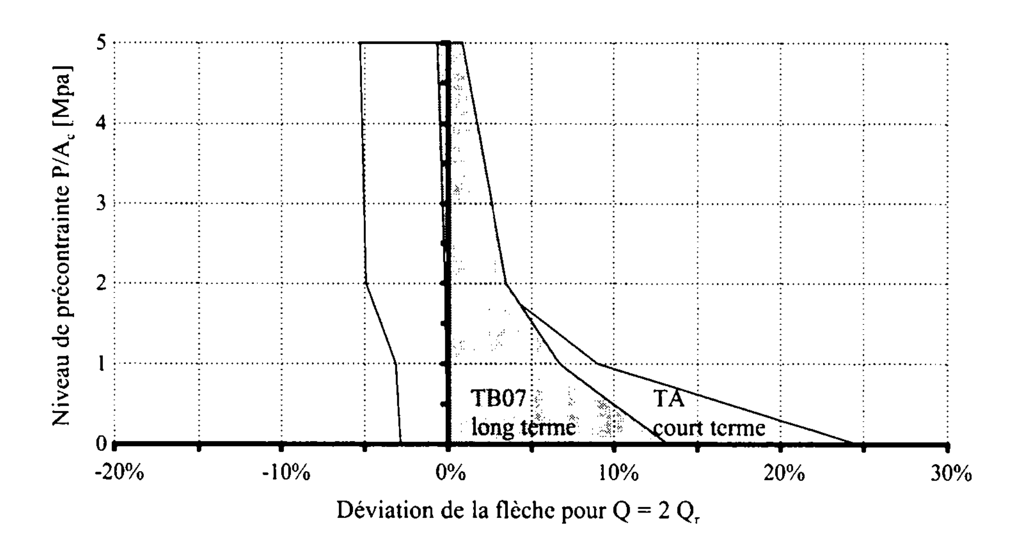


Figure 3.36: Domaine de variation de la déviation de la flèche pour les sections en T (séries TA et TB07) en fonction du niveau de précontrainte pour le court terme et le long terme.

Le *coefficient de participation*, β pour la LMC et β_t pour la LT/LTM, prend une valeur plus faible pour le calcul à long terme. La participation du béton tendu étant directement proportionnelle à ce coefficient, sa réduction entraîne également une amélioration du comportement de la LTM.

Tout ceci occasionne une amélioration massive du comportement de la LTM pour le calcul à long terme, lequel est un des buts principaux de ce travail. Les figures 3.35 et 3.36 montrent l'importante réduction du domaine de variation de la déviation pour le long terme.

3.4 Conclusions

La loi du tirant modifiée (LTM) présentée dans ce chapitre est dérivée de la loi du tirant du Code Modèle 90 CEB-FIP [17] ainsi que d'une autre contribution du CEB [16]. Certaines adaptations y ont été apportées de façon à permettre le traitement de zones sous-armées, ainsi que la prise en compte de la disposition des armatures dans la section.

Une bonne concordance a été constatée entre la loi moment-courbure CEB-FIP et le modèle de tirant modifié utilisé pour le calcul flexionnel. La corrélation est d'autant meilleure que les sections présentent une armature flexionnelle raisonnable et sont précontraintes, même faiblement. D'une manière générale, tout ce qui tend à réduire la taille de la zone de béton tendu améliore le comportement du modèle, ce qui inclut les paramètres géométriques.

En ce qui concerne le calcul à long terme, le fluage et la baisse du coefficient de participation du béton tendu ont également un effet particulièrement favorable sur la LTM. Un point reste cependant en suspens concernant la prise en compte de la fatigue statique. La LMC ne semble inclure ce phénomène en aucune manière – à moins que l'on considère que le coefficient β ne joue ce rôle à travers son influence sur le moment de fissuration réduit, en plus de sa fonction principale. En l'occurrence, l'utilisation de cette hypothèse a montré des résultats largement satisfaisants.

Les structures à parois minces – plissées ou autres – semblent donc d'excellents candidats pour l'application de la LTM. Elles sont généralement précontraintes et les épaisseurs de béton sont en principe réduites au minimum nécessaire, ce qui fait que leurs sections sont tout sauf massives. De plus, le comportement à long terme est un des objectifs principaux de ce travail, et les effets du fluage et de la diminution du rôle joué par le béton tendu sont très favorables.

Comme corollaire à cette validation de la LTM, on peut également dire que la LMC a pu être validée pour des exemples de calculs hors de son domaine d'origine, à savoir les sections massives. La concordance des modèles est même meilleure pour les sections en T, ce qui semble montrer que la LMC reste applicable dans le domaine des sections à parois minces.

4 Modèle de calcul bidimensionnel

Déjà au chapitre précédent, l'utilisation d'un modèle de calcul en coque pour l'analyse de structures spatiales à parois minces a été évoquée. Certains principes de base ont été posés, notamment le fait que, pour l'étude du comportement global d'un ouvrage tel qu'un pont caisson, le comportement des parois minces qui le composent est essentiellement membranaire (fig. 4.1).

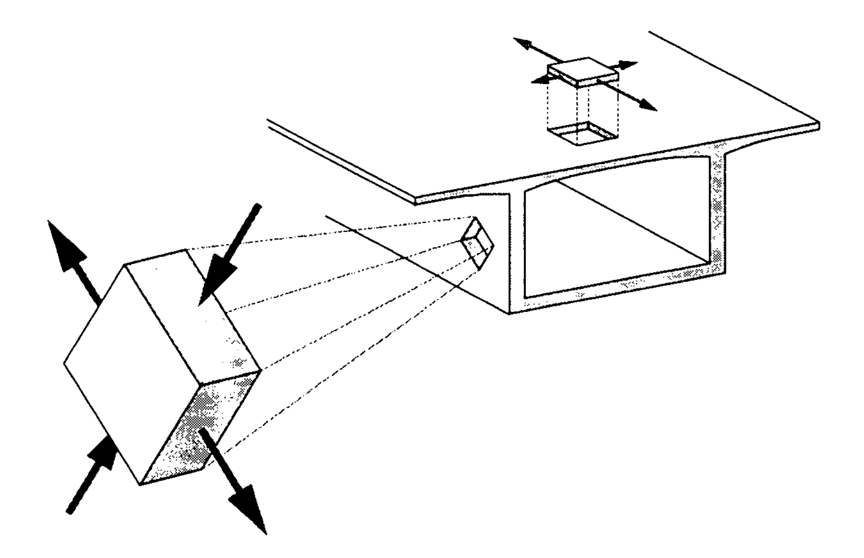


Figure 4.1: Application locale de la LTM selon les directions principales des efforts membranaires dans une structure à parois minces

Le modèle de calcul unidimensionnel développé dans le chapitre précédent permet de représenter le comportement d'un tirant en béton armé ou précontraint. Comme l'a montré l'application au calcul flexionnel avec AlphaFlex, cela est suffisant tant que les contraintes principales restent uniaxiales, c'est-à-dire toujours parallèles à l'axe de l'élément structural considéré, ce qui est loin d'être le cas dans la plupart des situations courantes. La figure 4.2a montre une section d'une poutre soumise à un moment de flexion et un effort normal. Les contraintes résultant de ces sollicitations restent parallèles à l'axe de la poutre. Si la même section est soumise en plus à un effort tranchant (fig. 4.2b), l'orientation des contraintes principales change radicalement. Un modèle de calcul bidimensionnel permettant d'en tenir compte devient nécessaire. On en vient tout naturellement à un modèle de calcul permettant de représenter le comportement d'une membrane ou d'un voile, et non plus seulement celui d'une barre.

D'une manière plus générale, la figure 4.1 montre comment la LTM peut être appliquée localement selon les directions principales des efforts membranaires dans une structure

composée de parois minces. La LTM peut ainsi être utilisée dans un référentiel dépourvu d'efforts de cisaillement. On peut dire en simplifiant que, dans un référentiel approprié, chaque point de la structure peut être considéré comme la superposition de tirants et/ou de bielles de compression.

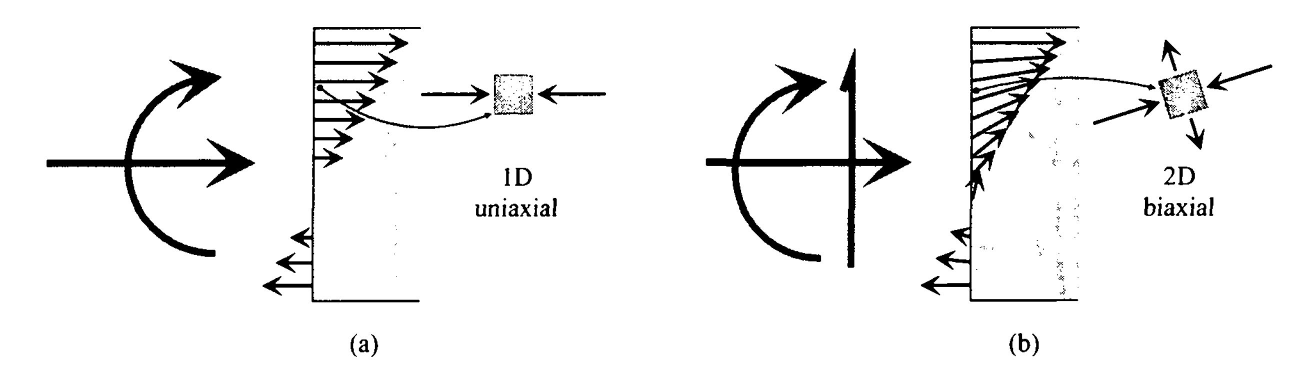


Figure 4.2: Contraintes principales dans une section d'une poutre
a) flexion + effort normal b) flexion + effort normal + effort tranchant

Il est bien clair que dans un exemple tel que celui de la figure 4.1, la flexion locale est nécessaire pour transmettre les charges transversalement du tablier aux âmes, engendrant ainsi des efforts non membranaires. Cependant, ces efforts flexionnels locaux sont négligeables vis-à-vis du comportement global de l'ouvrage (voir chapitre 3) et ne seront donc pas pris en compte dans le calcul de la fissuration.

Par contre, la flexion locale est nécessaire pour assurer l'équilibre au niveau de la structure. A part dans le cas de structures dont le comportement est purement membranaire, un modèle de calcul statique ne tenant pas compte de cette flexion locale est insuffisant. C'est pourquoi le calcul de structures spatiales à parois minces requiert la plupart du temps une modélisation de type **coque**, bien que leur comportement global soit essentiellement membranaire.

4.1 Application bidimensionnelle de la LTM

Contrairement à la plupart des modèles courants pour le calcul d'éléments membranaires en béton armé[1], l'extension bidimensionnelle de la LTM, ou LTM 2D, effectue la liaison acier-béton déjà au niveau du modèle de calcul unidimensionnel. Comme pour son application au calcul flexionnel (AlphaFlex), la LTM 1D est considérée comme une **loi constitutive uniaxiale** du matériau béton armé. Les problèmes de compatibilité des déformations entre les différentes composantes sont donc déjà résolus dans la LTM 1D. Cela inclut la prise en compte des non-linéarités matérielles du béton et de la participation du béton tendu. Les seules questions qui restent à résoudre sont celles qui sont directement liées à l'introduction de la 2ème dimension et de la précontrainte.

[1] MCFT, RA-STM, FA-STM, cracked membrane model, voir chapitre 2

4.1.1 Principes généraux

Comme déjà discuté précédemment, l'état de contrainte dans une structure à parois minces est essentiellement membranaire. Vis-à-vis du comportement global de la structure, les efforts flexionnels locaux sont négligeables. Toujours pour le comportement global de la structure, le calcul de la fissuration pourra donc se faire en ne tenant compte que des efforts membranaires. Le modèle d'éléments finis finalement utilisé pour le calcul de structures avec prise en compte de la fissuration sera donc un **modèle en coque** (avec flexion locale) **dont le comportement non-linéaire matériel est dirigé par les efforts membranaires** (sans flexion locale).

4.1.2 Directions principales

La LTM ne tient aucun compte des contraintes de cisaillement. Plutôt que de chercher à établir une relation d'interaction entre effort normal et effort de cisaillement, il semble plus judicieux – et beaucoup plus direct – de résoudre le problème en se plaçant dans un contexte adéquat. L'hypothèse généralement admise concernant l'orientation des fissures est que ces dernières se développent perpendiculairement à la contrainte principale de traction. Donc, si on se place dans un référentiel correspondant aux directions des contraintes principales, les contraintes de cisaillement disparaissent et les fissures sont orientées selon les mêmes axes. La LTM devient applicable.

La principale hypothèse est donc la suivante : les fissures sont perpendiculaires aux contraintes principales de traction. Le corollaire de cette hypothèse est qu'une fissure ne transmet pas de cisaillement dans son plan (aggregate interlock, dowel action). Cela implique également que l'orientation des fissures peut changer durant le calcul. Une orientation fixe impliquerait forcément une transmission de cisaillement dans le plan de la fissure (FA-STM).

Dans un élément structural soumis au cisaillement, les directions principales des contraintes et des déformations ne coïncident pas nécessairement, même si cet élément est isotrope. Cela contredit, du moins en partie, les hypothèses du paragraphe précédent. Cependant, l'expérience a montré [75] que ces directions diffèrent peu, et ce même jusqu'à la rupture. De fait, les valeurs mesurées ne s'écartent jamais de plus de 10°. On gardera donc comme hypothèse que ces directions sont identiques.

Il faut cependant garder à l'esprit que toutes ces considérations s'appliquent à des contraintes et déformations moyennes, du fait du type de modèle utilisé. Les variations locales – par exemple au droit d'une fissure – des champs de contraintes et de déformations ne pourront pas être extraites directement du modèle. Les informations que fournit réellement la LTM 2D sont uniquement des résultats moyens. On peut détecter les zones fissurées – et non pas les

fissures – dans une structure, obtenir une mesure de leur degré de fissuration (fissuration stabilisée ou non) et l'orientation des fissures. Au niveau du calcul de la structure, l'information principale est bien sûr la variation de rigidité apparente résultant des non-linéarités matérielles. Par contre, aucun résultat local ne pourra être obtenu directement : ouverture et écartement des fissures, ainsi que les contraintes dans les aciers au droit d'une fissure, devront être déterminés par d'autres moyens (voir les applications dans le chapitre 5).

4.1.3 Armatures équivalentes

Dans une structure quelconque, les armatures ne sont évidemment pas toujours disposées selon les directions principales des efforts. Toutefois, dans un pont en caisson, ces directions coïncident pour une grande partie des dalles (tablier et dalle inférieure), sauf dans les zones proches des appuis, qui sont soumises à des perturbations. Quant aux armatures des âmes, de même que dans une paroi porteuse dans un bâtiment, elles sont disposées en nappes horizontales et verticales, alors que les directions des efforts principaux peuvent fréquemment être inclinées à 45°.

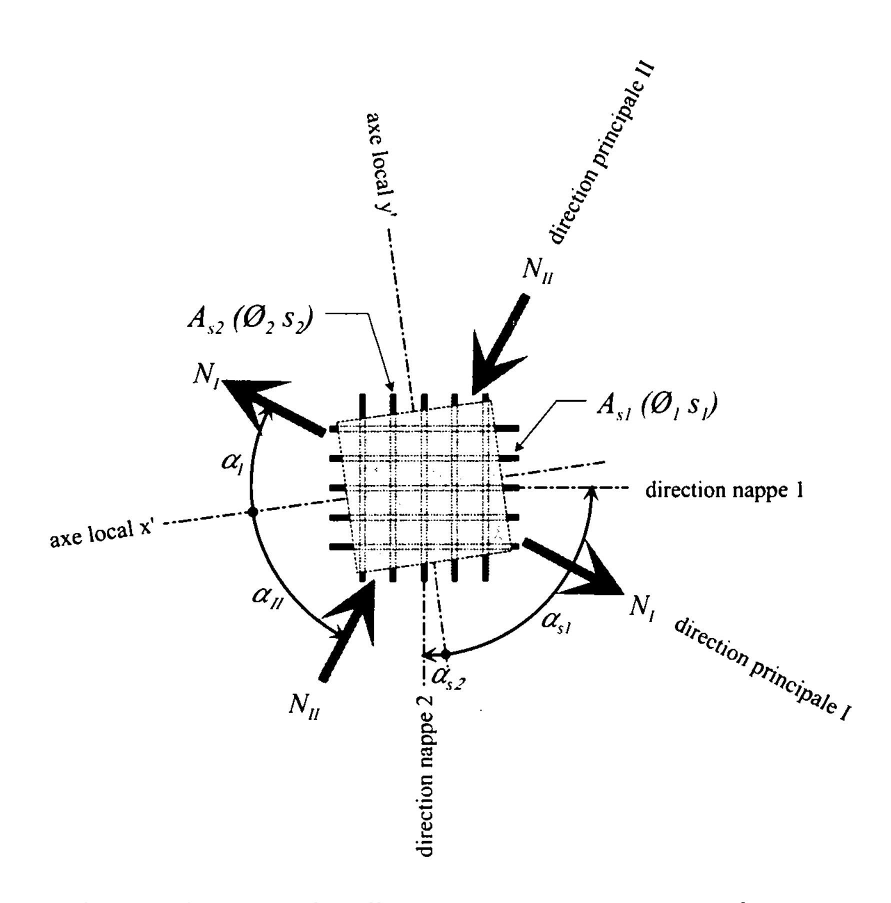


Figure 4.3: Axes locaux, directions des efforts principaux et orientation des armatures

Note : dans ce chapitre et le suivant, les indices en chiffres romains I et II se rapportent aux directions principales et non à une indication du stade de fissuration, ceci afin d'éviter toute confusion avec la numérotation des nappes d'armatures.

Dans le cas général (fig. 4.3), il faut définir de façon séparée les directions des différentes nappes d'armatures (les nappes ne sont pas forcément orthogonales) et les directions des efforts principaux. Le repère de référence est le repère local (x', y') au point de la structure considéré.

L'orientation des armatures ne coïncidant généralement pas avec les directions des efforts principaux, l'utilisation de la LTM selon ces dernières nécessite la définition d'armatures équivalentes.

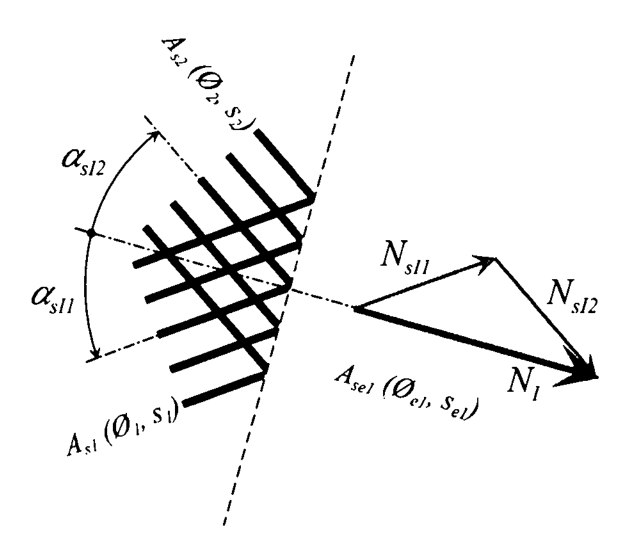


Figure 4.4: Calcul des armatures équivalentes

Considérant la figure 4.4, en faisant l'hypothèse que le glissement $\gamma_{I,II}$ au droit de la fissure est nul, ce qui revient à dire que l'orientation de la fissuration correspond aux directions principales de déformations, Cope et Clarke ont proposé une armature équivalente pour le cas des dalles [21]. Le raisonnement, basé sur la compatibilité des déformations et l'équilibre dans le plan contenant les armatures, s'applique tel quel pour les membranes. Si le comportement des armatures est **élastique linéaire**, l'aire équivalente dans la direction principale j s'écrit

$$A_{se,j} = \sum_{i=1}^{n} A_{si} \cdot \cos^4(\alpha_{si} - \alpha_j) \tag{4.1}$$

n étant le nombre de nappes d'armatures et A_s l'aire d'acier par unité de longueur. Cependant, si cette formulation reproduit bien la rigidité équivalente des armatures, elle ne convient pas pour déterminer leur résistance plastique. Il faut pour cela utiliser un critère de plastification. En reprenant le développement de Cope et Clarke, mais avec cette fois-ci l'hypothèse de **plastification de toutes les armatures**, au lieu d'un calcul élastique de leurs contraintes, on aboutit à

$$A_{sp,j} = \sum_{i=1}^{n} A_{si} \cdot \cos^2(\alpha_{si} - \alpha_j) \tag{4.2}$$

qui n'est rien d'autre que le critère de plastification de Johansen, sous une forme généralisée. Ainsi, l'aire équivalente d'armature n'est pas la même en stade élastique linéaire qu'en cas de plastification. Pour un angle de 45°, A_{se} (éq. 4.1) est 2 fois plus faible que A_{sp} (éq. 4.2).

Pour obtenir un comportement correct du modèle à l'état de service, il faut donc introduire dans la LTM l'aire équivalente selon l'équation 4.1, et le cas échéant une limite d'élasticité de l'acier augmentée du ratio A_{sp}/A_{se}. Il faut cependant garder à l'esprit que ce modèle n'est correct à la rupture que si les directions des efforts principaux correspondent à l'orientation des armatures, la plastification n'intervenant pas au niveau d'une nappe d'armature en particulier mais de l'armature équivalente à l'ensemble des nappes. La modification de la limite élastique ne doit servir qu'à éviter une plastification prématurée à l'état de service.

A noter que la plastification de certaines armatures ne correspond pas nécessairement à la rupture. Des armatures constructives peuvent tout à fait se plastifier à l'état de service dans certaines conditions (voir chap. 5)

Zone efficace

Le même problème se pose pour la détermination de la zone efficace dans une direction quelconque. L'application de la LTM nécessite de connaître le diamètre et l'écartement des barres pour le calcul de la zone efficace. Des valeurs équivalentes doivent donc également être déterminées pour ces paramètres. Un raisonnement rigoureux tel que celui utilisé pour l'aire équivalente étant difficilement applicable ici, ces paramètres pourront être raisonnablement estimées en utilisant l'équation 4.2 et en y substituant les aires d'acier par les valeurs des paramètres à évaluer. On obtient par exemple pour l'écartement des barres

$$s_{éq,j} = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot \cos^2(\alpha_{si} - \alpha_j) \qquad (4.3)$$

et on opère de même pour le diamètre des barres. Il est également possible d'interpoler directement sur les dimensions de la zone efficace. Les résultats obtenus sont pratiquement identiques à la solution retenue ici. Ce choix s'est fait essentiellement pour des raisons de commodité d'implémentation.

4.1.4 Rigidité apparente et coefficients de perte de rigidité

L'état moyen de fissuration et la rigidité apparente moyenne sont ainsi définis en tout point quelconque d'un élément de membrane en béton armé selon les directions des efforts membranaires principaux. Avant de passer au calcul structural proprement dit, il est encore nécessaire de définir un format pour décrire l'état d'un point de la structure (non-linéarités matérielles – fissuration, fluage).

Si on considère une direction principale, connaissant l'armature équivalente dans cette direction et son niveau de sollicitation, la LTM fournit la déformation moyenne correspondante. On peut également définir la rigidité apparente comme la pente de la droite passant par l'origine et le point de la LTM décrivant l'état du tirant (fig. 4.5).

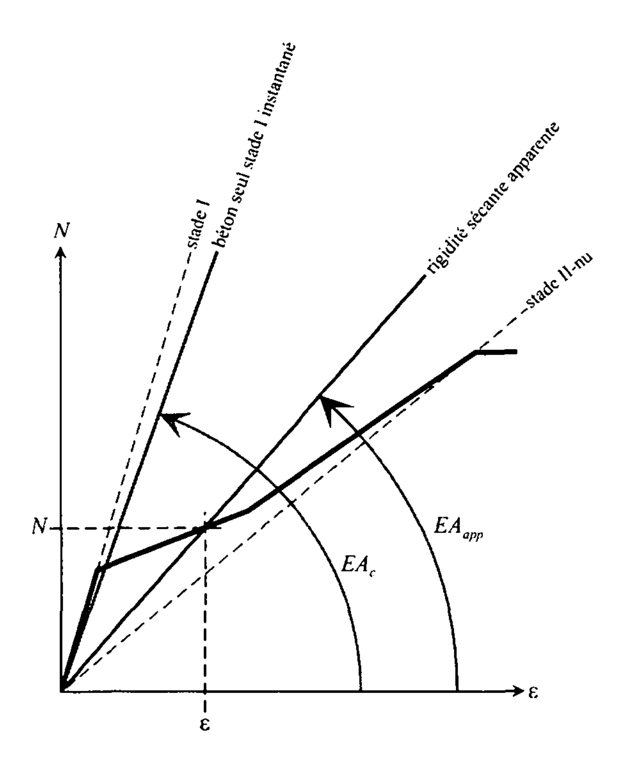


Figure 4.5: Rigidité instantanée en stade I du béton seul et rigidité sécante apparente du tirant. Le coefficient de perte de rigidité r est égal au rapport EA_{app}/EA_c

En comparant cette rigidité apparente a la rigidité instantanée de la section de béton seul en stade I, on peut définir un coefficient de perte de rigidité r (équ. 4.4). Ce coefficient englobe les effets des armatures, de la fissuration et du fluage.

$$r = \frac{EA_{app}}{EA_c} \tag{4.4}$$

Une valeur de $r = 1$ signifie que la rigidité apparente est la même que celle du béton seul en stade I à court terme. En pratique, ce coefficient peut prendre des valeurs légèrement supérieures à 1 à cause de la présence des armatures. C'est ce qui explique dans la figure 4.5 la pente du stade I est légèrement supérieure à celle de référence. Par contre, dès l'apparition de la fissuration, sa valeur chute rapidement en dessous de l'unité. Pour une section non fissurée soumise au fluage, on retrouve en négligeant les armatures :

$$r = \frac{E_c^{\varphi}}{E_c} = \frac{1}{1+\varphi} \tag{4.5}$$

Pour caractériser complètement l'état d'un point donné d'une structure, 3 paramètres sont nécessaires : 2 coefficients r_I et r_{II}, correspondant aux variations de rigidité dans les directions

principales I et II, et l'orientation θ_r de la 1ère direction principale (la seconde étant toujours perpendiculaire à la 1ère). Comme on le voit à la figure 4.6, l'état isotrope élastique linéaire peut être représenté par un cercle de rayon $r = 1$. Les non-linéarités matérielles déforment ce cercle en une ellipse, dont le grand axe correspond ici à l'orientation des fissures.

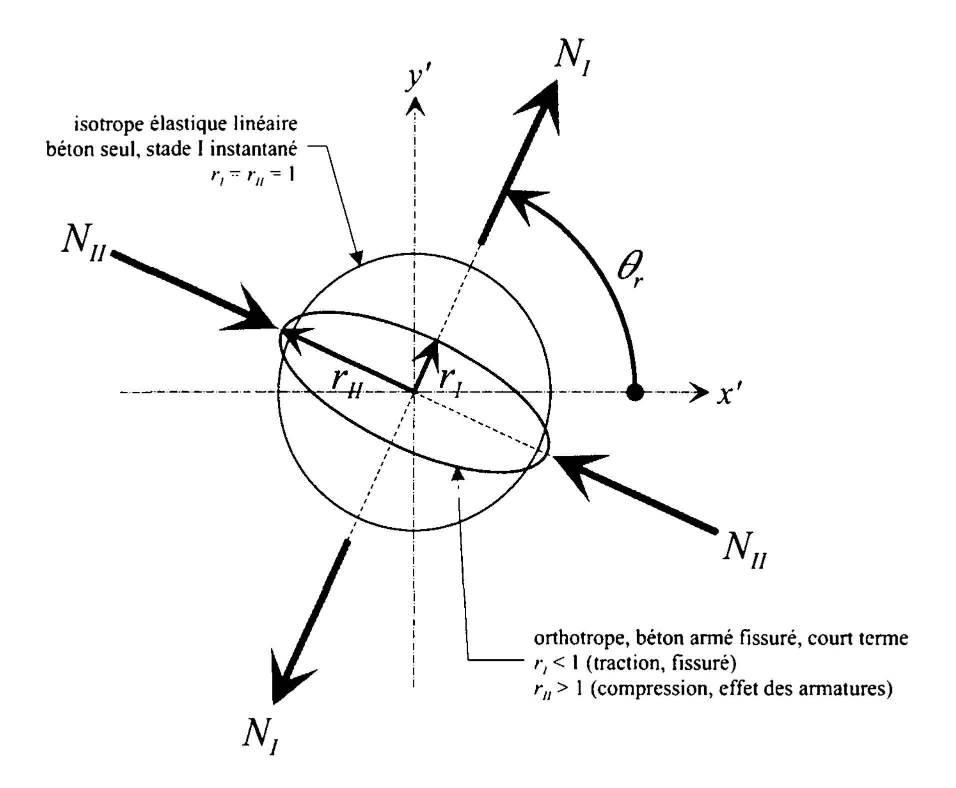


Figure 4.6: Paramètres décrivant la rigidité apparente en un point de la structure : 2 coefficients de perte de rigidité r_I et r_{II} et orientation θ_r. Exemple à court terme avec une direction tendue et l'autre comprimée.

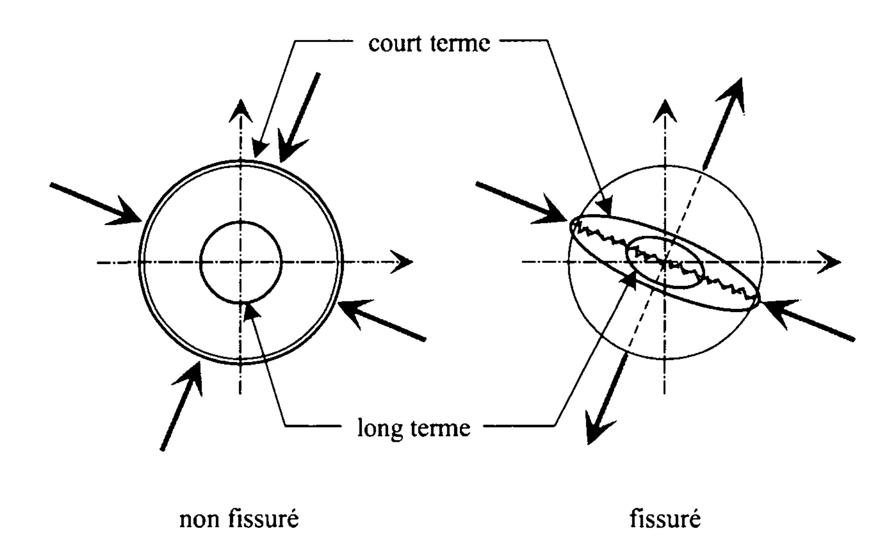


Figure 4.7: Différentes configurations de coefficients de perte de rigidité, court terme et long terme

La figure 4.7 montre différents états de variation de rigidité, à court terme et à long terme. En l'absence de fissuration, l'anisotropie due aux armatures reste faible, voire imperceptible – pour autant évidemment que les différentes nappes d'armatures ne soient pas trop différentes. Dans le cas fissuré, on voit clairement que les deux ellipses du court terme et du long terme ne sont pas homothétiques. La participation du béton est nettement moins importante dans la direction fissurée, et le fluage a donc une influence plus faible sur le coefficient de perte de rigidité.

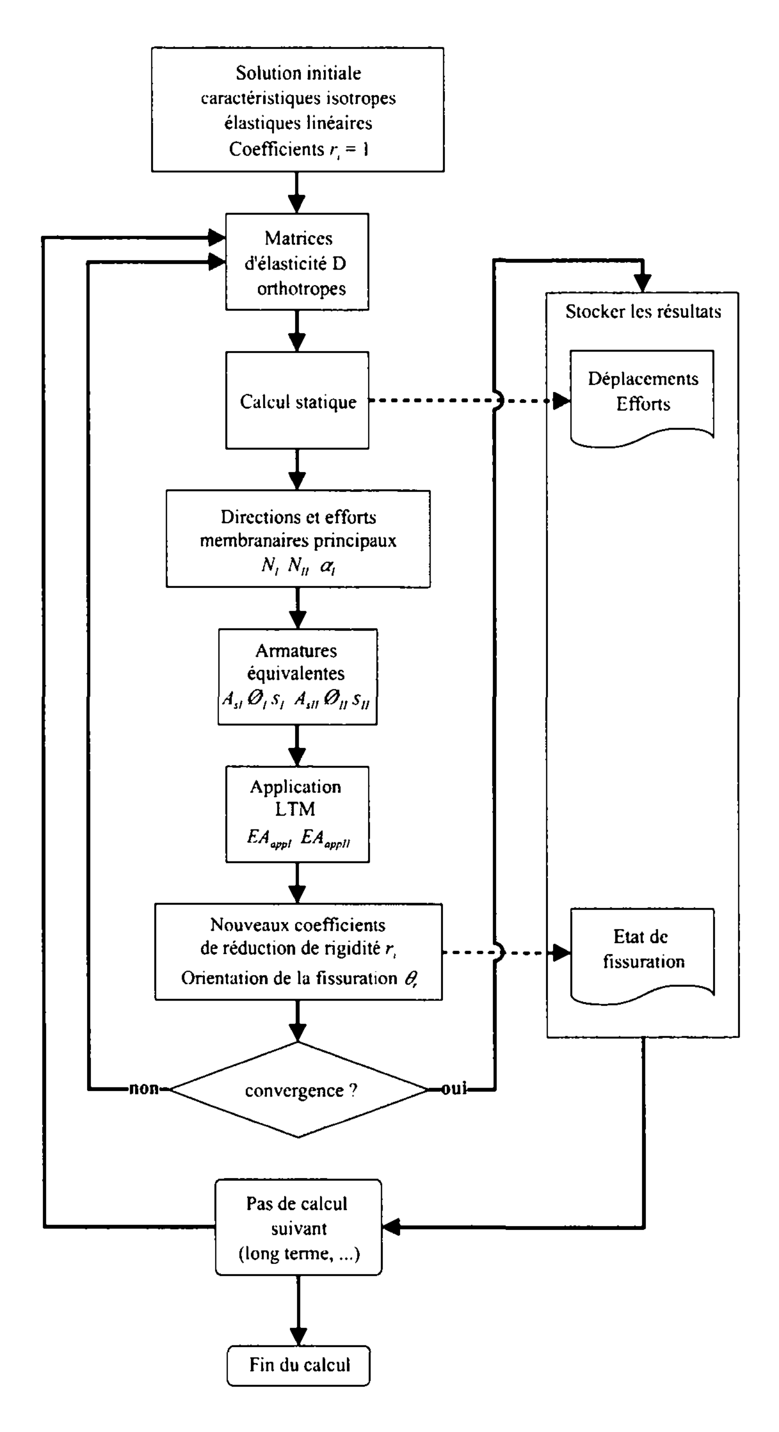


Figure 4.8: Processus général du calcul itératif non-linéaire

4.1.5 Processus général de calcul

Pour l'implémentation dans le modèle de calcul par éléments finis, le calcul de fissuration est effectué à chaque point d'intégration (point de Gauss) de chaque élément fini. L'organigramme de la figure 4.8 décrit le déroulement du calcul non-linéaire. Les cases blanches représentent les étapes présentes dans un calcul élastique linéaire classique.

A chaque itération, un calcul linéaire classique de la structure est effectué sur la base des rigidités apparentes réduites définies à l'aides des coefficients r_i de perte de rigidité définis ci-avant. Ces coefficients permettent de déterminer la matrice d'élasticité apparente en tout point de la structure. Cette matrice varie sur l'ensemble de la structure, et même à l'intérieur d'un élément fini selon son état de fissuration.

Ensuite, en chaque point de Gauss de la structure, les efforts membranaires principaux sont déterminés en partant des résultats de ce calcul. Les armatures équivalentes calculées selon ces directions principales permettent l'application de la LTM selon chacune d'elles. On obtient ainsi pour chaque direction principale une rigidité apparente EA_{app}, d'où on tire de nouvelles valeurs des coefficients de perte de rigidité. Ces nouvelles valeurs de r_I, r_{II} et θ_r sont confrontées à celles de l'itération précédente sur l'ensemble de la structure. Le test de convergence à la fin de l'itération porte précisément sur les variations de ces 3 paramètres. Si la convergence est satisfaisante, les résultats sont stockés et le pas de calcul suivant est entamé.

La solution initiale pour le processus itératif est tout naturellement un calcul élastique linéaire de la structure, sans même tenir compte de la présence des armatures. Pour ce faire, il suffit d'initialiser tous les coefficients r_i à 1. L'orientation θ_r n'a aucune importance lorsque r_I est égal à r_{II}.

4.1.6 Introduction dans l'élément fini de coque : modèle orthotrope et matrice d'élasticité D'

L'élément fini de coque utilisé dans le logiciel MAPS [10] est un élément isoparamétrique quadrilatéral. Ses bords et sa surface peuvent être courbes et il tient compte des déformations d'effort tranchant (hypothèse de Mindlin).

La matrice de rigidité de l'élément coque est calculée par intégration de la matrice d'élasticité **D'** sur le volume de l'élément (le ' indique que la matrice est exprimée dans le référentiel local de l'élément). Pour l'intégration numérique, **D'** doit être connue en chaque point de Gauss (fig. 4.9). C'est donc en ces points que le calcul de rigidité apparente est effectué, de façon à pouvoir déterminer la matrice **D'** apparente en fonction des paramètres r_I, r_{II} et θ_r.

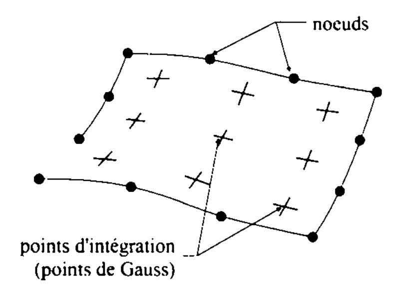


Figure 4.9: Element isoparamétrique bicubique (4 noeuds par côté)

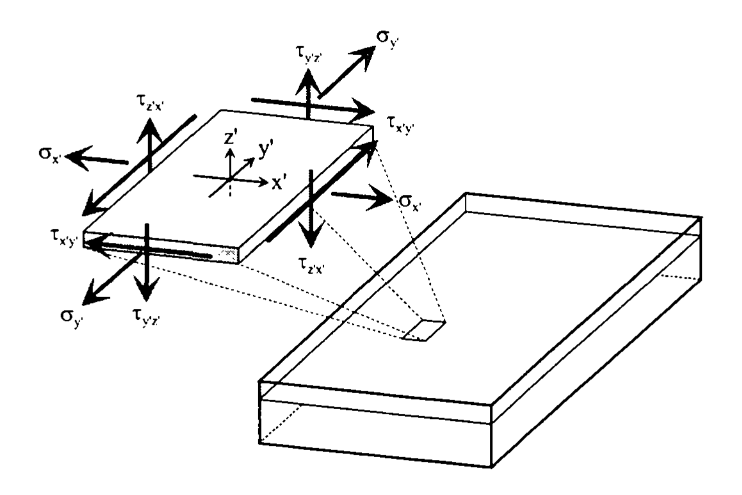


Figure 4.10: Contraintes dans un petit élément de matière d'un feuillet d'un élément coque

La figure 4.10 montre l'état de contrainte d'un petit élément de matière d'un feuillet dans un élément coque. L'équation 4.6 est une forme généralisée de la loi de Hooke. C'est la matrice **D'** qui y apparaît qui doit être formulée.

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}' \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}_o') = \mathbf{D}' \cdot \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{z'x'} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'o} \\ \varepsilon_{y'o} \\ \gamma_{x'y'o} \\ \gamma_{y'z'o} \\ \gamma_{z'x'o} \end{Bmatrix} \right) \qquad (4.6)$$

Dans le cas d'un matériau isotrope, **D'** prend la forme suivante :

$$\mathbf{D}' = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k} \end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

où E est le module d'élasticité et ν le coefficient de Poisson. Le coefficient k qui apparaît dans les termes liés aux contraintes de cisaillement transversal (et par là aux efforts tranchants) est un facteur de forme qui permet de tenir compte de la répartition parabolique de ces contraintes sur l'épaisseur de la coque. Il prend la valeur $k = 6/5$.

Pour la prise en compte des non-linéarités matérielles, **D"** doit être exprimée dans le référentiel défini par les coefficients de réduction de rigidité r_i et leur orientation θ_r (éq. 4.8). **D'** est ensuite calculée par une simple rotation d'angle $-\theta_r$ (éq. 4.10 et 4.11).

$$\mathbf{D}"=\begin{bmatrix} D_{x"} & D_{1"} & 0 & 0 & 0 \\ D_{1"} & D_{y"} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{x"y"} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{y"z"} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{z"x"} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$$\mathbf{D}"=\frac{E_c}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} r_I & \nu\cdot\sqrt{r_I\cdot r_{II}} & 0 & 0 & 0 \\ \nu\cdot\sqrt{r_I\cdot r_{II}} & r_{II} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\cdot\sqrt{r_I\cdot r_{II}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k}\cdot r_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k}\cdot r_{II} \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

$$\mathbf{D'}=\mathbf{R}^T(-\theta_r)\cdot\mathbf{D}"\cdot\mathbf{R}(-\theta_r) \tag{4.10}$$

$$\mathbf{R}(\theta)=\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ -2\cos\theta\sin\theta & 2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

L'équation 4.8 montre la formulation générale de la matrice **D"** pour un matériau orthotrope. Dans son expression en fonction des coefficients r_I et r_{II} (équation 4.9), en remplaçant $r_I = r_{II} = 1$, on retrouve la matrice isotrope de l'équation 4.7. La formulation des termes $D_{1"}$ et $D_{x"y"}$ correspond à celle recommandée par Huber et Timoshenko [71] (utilisation de la moyenne géométrique des rigidités principales). En ce qui concerne les deux termes liés aux efforts tranchants ($D_{y"z"}$ et $D_{z"x"}$), l'option a été prise de les réduire dans la même proportion que les termes membranaires associés.

Toujours dans l'équation 4.9, il apparaît que le coefficient de Poisson est indépendant des non-linéarités matérielles du modèle. De fait, il est considéré comme constant, au même titre

que le module instantané E_c du béton. Cela est parfaitement correct localement, dans le béton situé entre les fissures, mais il ne faut pas perdre de vue que toute l'approche est basée sur des valeurs moyennes, tant au niveau des variables (contraintes et déformations) que des caractéristiques des matériaux. Concrètement ces moyennes sont matérialisées par les coefficients de réduction de rigidité. Ainsi les termes de **D''** dépendant du coefficient de Poisson subissent des variations, les coefficients de réduction y apparaissant également. Une importante réduction de rigidité due à la fissuration dans une direction se répercute donc automatiquement sur les termes non diagonaux, et l'effet du coefficient de Poisson dans la direction perpendiculaire s'en trouve également réduit. Il en va de même pour la rigidité au cisaillement membranaire $D_{x''y''}$.

4.2 Modélisation de la précontrainte

Dans la plupart des codes de calcul de structures par éléments, la précontrainte est introduite sous forme de charges équivalentes. Dans le cas d'un modèle de calcul en barre, il s'agira de charges réparties le long de l'axe des éléments et de charges concentrées. Dans un modèle en coque, une approche plus fine est nécessaire. La méthode utilisée ici consiste à introduire les forces de déviation des câbles directement le long du tracé de ces derniers[2]. Les pressions exercées sur la structure par un câbles sont introduites telles quelles dans le modèle.

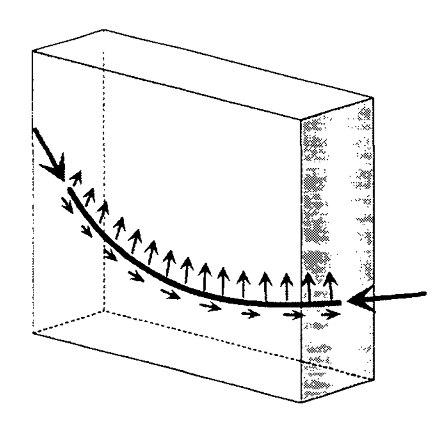


Figure 4.11: Forces de déviation agissant sur le béton le long du tracé d'un câble de précontrainte

Si une telle approche est satisfaisante pour un calcul élastique linéaire, une analyse non-linéaire tenant compte du fluage et de la fissuration exige un élément supplémentaire : si la précontrainte est intérieure et que les câbles sont injectés, la section d'acier des câbles doit impérativement être prise en compte dans le calcul. En plus de son rôle d'introduction des efforts de précontrainte, elle remplit aussi – dans une certaine mesure – la même fonction que

[2] Le logiciel MAPS permet d'introduire directement le tracé des câbles et leur tension. Le calcul des forces de déviation est assuré par le programme.

l'armature passive. Si ce n'est pas là son rôle principal, elle n'en a pas moins une influence non négligeable.

4.2.1 Prise en compte directe dans la LTM

Le problème des effets d'échelles liés à la discrétisation des armatures concentrées a déjà été abordé dans le chapitre précédent. Ce problème ne concerne pas – ou rarement – les armatures passives dans une modélisation en coque d'un ouvrage d'art précontraint. Ces armatures sont généralement réparties et, de plus, la discrétisation en éléments finis correspond naturellement assez bien à leurs zones d'influence. Dans l'exemple de la figure 4.12, chaque paroi mince de la section est modélisée par un panneau d'éléments finis. Quelle que soit la finesse du maillage, chacun de ces panneaux contient une armature passive uniformément répartie et correspond à la zone d'influence ce cette armature.

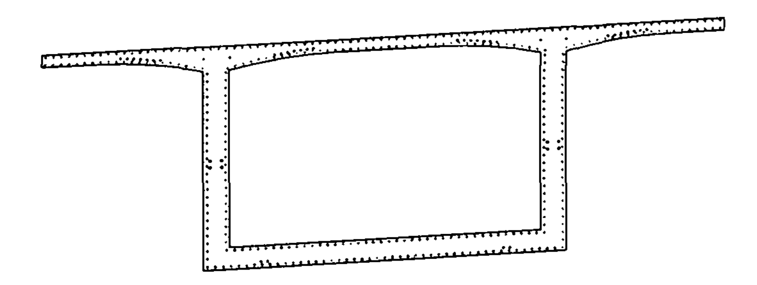


Figure 4.12: Armatures passives réparties et armatures de précontrainte concentrées.

En revanche, les câbles de précontrainte sont des armatures concentrées, et le plus souvent même des groupes de câbles, concentrés en des points particuliers d'une section. Il est difficile d'évaluer leur zone efficace (figure 4.13a), et donc de déterminer la section du tirant correspondant pour le calcul de la fissuration. Les critères utilisés dans la LTM pour le calcul de zone efficace des armatures passives ne sont pas valables pour des câbles de précontrainte.

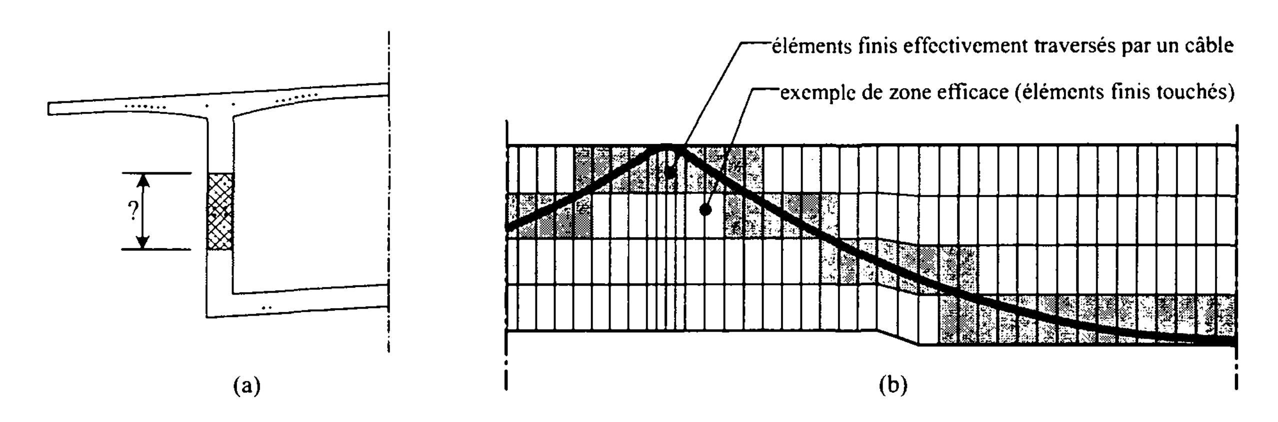


Figure 4.13: a) Zone efficace d'un groupe de câbles dans l'âme d'un caisson
b) Câblage superposé au réseau d'éléments finis d'une âme ; la zone d'influence des câbles peut déborder des éléments effectivement traversés

A cela s'ajoutent les problèmes de conflit de cette zone efficace avec la discrétisation (voir effets d'échelle et discrétisation dans le chapitre précédent). En effet, la zone efficace du câblage peut déborder des éléments finis effectivement traversés (figure 4.13b), ce qui imposerait d'« étaler » l'armature de précontrainte sur plusieurs éléments finis selon un découpage en escalier pouvant être fort complexe, dans une zone efficace qui peut fortement varier le long du câble du fait de la discrétisation.

Devant ces difficultés, une autre approche s'impose pour la modélisation de ces câbles.

4.2.2 Modélisation hors LTM, comme nervure indépendante

La solution la plus directe consiste à contourner le problème en modélisant les câbles de précontrainte séparément du reste de la section. Concrètement, la structure est modélisée sans la précontrainte, avec seulement les armatures passives. Puis les câbles sont superposés à la fois comme charges équivalentes (effet de la tension dans les câbles) et comme nervures (effet de la section d'acier). Il s'agit en fait d'éléments de type barre particuliers, ou plutôt de raidisseurs, qui sont indépendants de la géométrie du maillage et sont liés aux éléments de coque sur toute leur longueur, comme un câble de précontrainte.

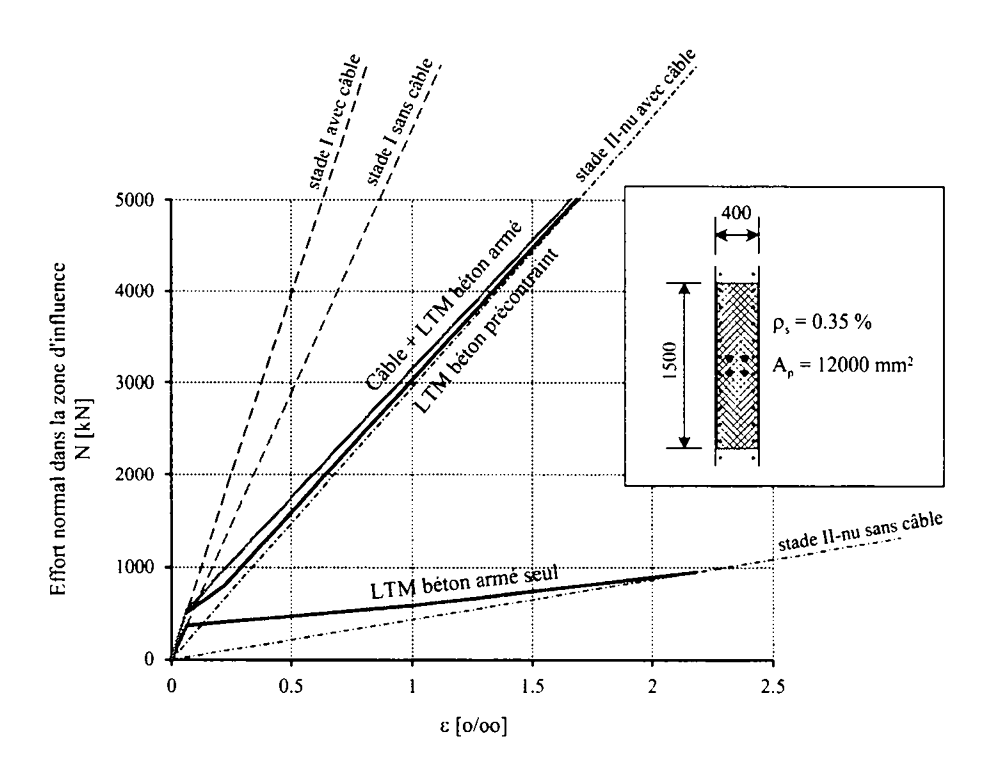


Figure 4.14: Introduction d'un câble de précontrainte dans une âme d'un pont caisson. Cas de figure type pour une zone d'influence des câbles considérée de 1.5 m de haut, A_p = 12000 mm^2, armature passive 0.35 %.

Ainsi, la rigidité des câbles de précontrainte est prise en compte au niveau de la structure, et leur effet est bel et bien présent dans les résultats du calcul statique. Par contre, localement

une section de béton armé ignore complètement qu'elle est traversée par un câble. Au niveau du calcul de la fissuration (application de la LTM), la zone d'influence du câble apparaîtra donc probablement comme sous-armée (suivant le taux d'armature passive dans la zone considérée).

Les 3 lois de comportement représentées à la figure 4.14 sont, de bas en haut, celle de la zone d'influence considérée sans ses câbles de précontrainte, celle de la zone d'influence en tenant compte des câbles, et enfin celle de la modélisation proposée, à savoir la première des 3 lois augmentée de la rigidité des câbles seuls. La rigidité en stade II-nu de la section est beaucoup plus faible sans armature de précontrainte qu'avec cette dernière. Cela a pour effet de déplacer sur la droite le point de passage du stade de formation des fissures au stade de fissuration stabilisée – voire de le faire disparaître complètement si l'armature passive est trop faible. Dès lors, ce passage a lieu pour des valeurs d'allongement moyen ε nettement plus élevées, et l'allure de la branche de fissuration devient presque une droite. Ce comportement subsiste évidemment quand le comportement élastique linéaire de l'armature de précontrainte y est superposé. Ainsi, la cassure qui est normalement bien visible dans la LTM disparaît, ce qui implique une différence de comportement entre les deux modèles.

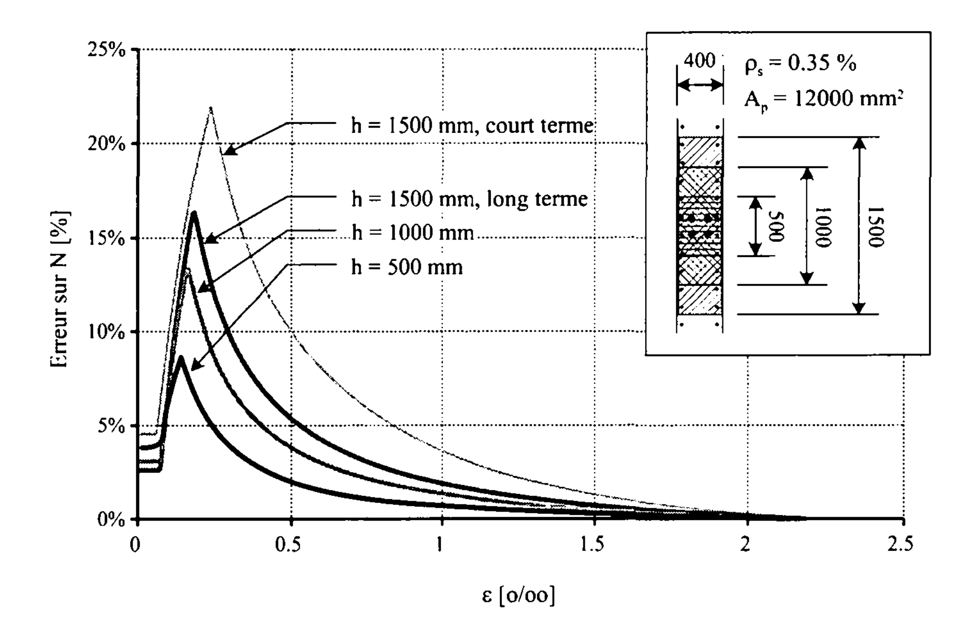


Figure 4.15: Erreur sur l'effort normal en fonction de l'allongement. La courbe supérieure correspond au cas de la figure 4.14. Les 3 courbes inférieures correspondent à la même section mais pour un calcul à long terme et en faisant varier la hauteur de la zone d'influence du câble de précontrainte.

La zone efficace réelle des armatures de précontrainte étant mal connue, il est difficile de quantifier la précision du modèle présenté ici. La figure 4.15 montre l'erreur relative sur l'effort normal pour différentes dimensions de cette zone efficace. Les excédents de rigidité observés restent relativement faibles et diminuent pour le long terme. Comme dans le chapitre

précédent, la zone la plus sensible est le début de la phase de formation des fissures. Il faut également garder à l'esprit que cette erreur est généralement très localisée, une grande partie des armatures passives se trouvant hors de la zone d'influence des armatures de précontrainte.

Il faut encore ajouter que ces divergences disparaissent presque totalement en stade non fissuré. Les légères déviations observées (fig. 4.15, $\varepsilon \leq 0.1\ ^{\circ}/_{\circ\circ}$) proviennent du fait que, pour le modèle présenté ici, l'aire d'acier de précontrainte n'est pas prise en compte dans le calcul de l'aire nette de béton. Donc si le niveau de précontrainte est élevé ($\beta > 0.7$), l'absence de fissuration règle automatiquement le problème. Par contre, si la précontrainte n'est pas suffisante pour empêcher la fissuration, cela signifie aussi que l'armature passive devra être plus importante pour assurer la sécurité structurale, ce qui réduit également la déviation du modèle. Compte tenu de sa grande souplesse d'utilisation, ce modèle est donc tout à fait satisfaisant.

4.3 Exemples numériques – comparaison avec des résultats expérimentaux

Afin de valider le modèle, et avant de passer à des applications plus complexes, il a été appliqué à des cas expérimentaux, de façon à disposer de valeurs de comparaison. Le premier exemple est une poutre en flexion composée, qui aurait donc pu être calculé par AlphaFlex. Il importait cependant de tester également le modèle de calcul en coque sur un cas de flexion. Le second exemple concerne des essais de membranes en béton armé soumises à des sollicitations de cisaillement membranaire.

4.3.1 Poutres en I en flexion composée

Rotilio a effectué une série d'essais de flexion à l'état de service sur des poutres en I précontraintes [63]. Ces poutres ayant été en fait soumises à des sollicitations cycliques, seules les mesures de la première montée en charge ont été utilisées ici.

Le système statique utilisé (figure 4.17) a été choisi de manière que la partie centrale de la poutre soit sollicitée uniquement en flexion (simple ou composée), sans effort tranchant. L'effort normal était introduit par deux câbles de précontrainte non injectés. Deux séries d'essais ont été réalisées avec différents niveaux de chargement et de précontrainte. Dans l'approche I, les niveaux de chargement minimal et maximal étaient maintenus constants pour toute la série, tandis que la précontrainte – et donc le degré de compensation des déformations – variait. Dans l'approche II, c'est le niveau de sollicitation du béton (état de contraintes maximal et minimal à la fibre extrême tendue) qui était maintenu constant. L'aspect déterminant de cette deuxième série en ce qui nous concerne est que le niveau de sollicitation

maximal est toujours légèrement supérieur au niveau de fissuration, soit exactement dans la zone la plus sensible du modèle. Dans notre cas, seul le niveau de chargement maximal fixé pour chaque spécimen a été utilisé, correspondant à la fin de la première montée en charge (tableau 4.1).

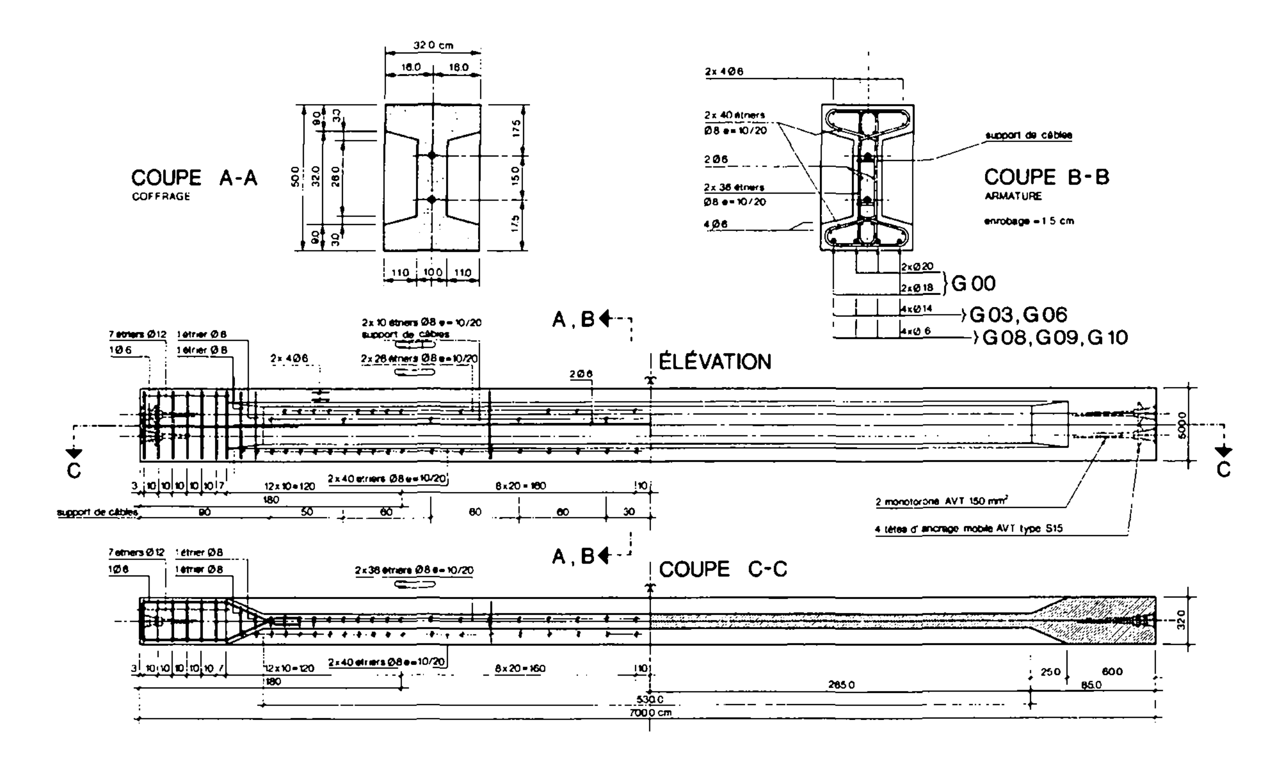


Figure 4.16: Poutres précontraintes testées par Rotilio [63]

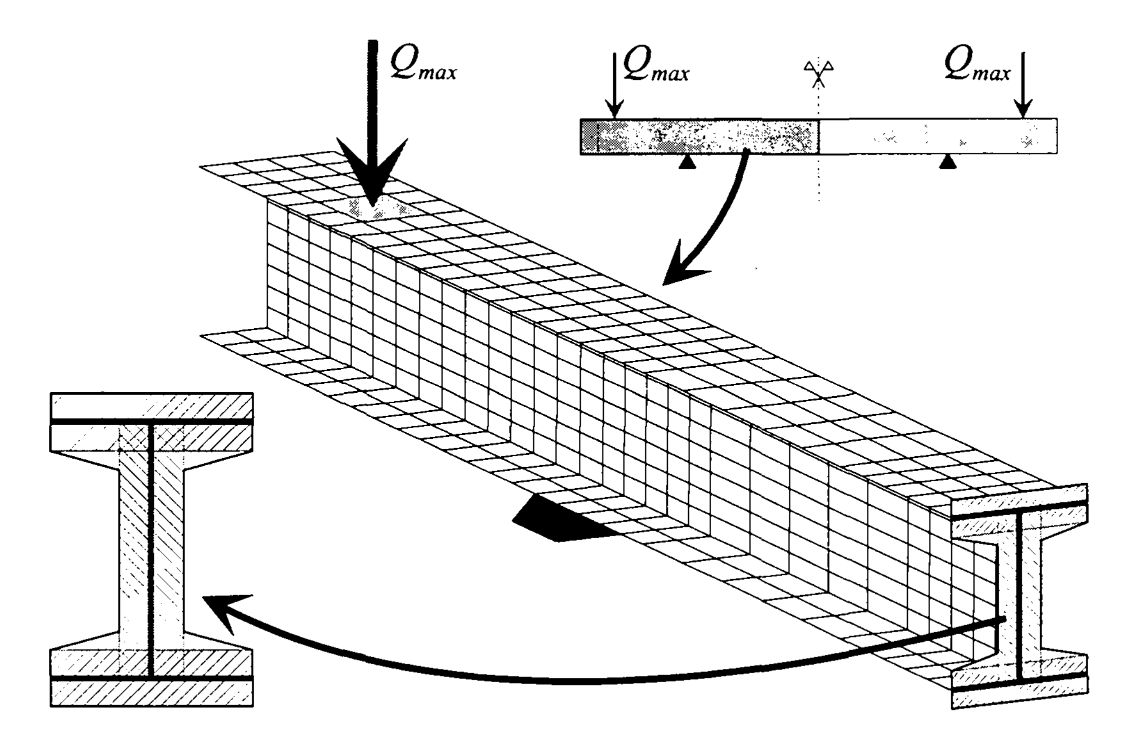


Figure 4.17: Système statique et réseau d'éléments finis

Tableau 4.1: Charges appliquées

	Degré de compensation β	Précontrainte P [kN]	Charge Q_{max} [kN]
G00-I	0.0	0	104
G03-I	0.3	78	83
G06-I	0.6	155	63
G10-I	1.0	260	35
G08-II	0.8	207	68
G09-II	0.9	233	71
G10-II	1.0	260	74

Tableau 4.2: Caractéristiques du béton. Le module apparent du béton a été déterminé à partir de la partie en stade I de la première montée en charge de chaque poutre. La résistance à la traction vient d'essais de traction directe sur cylindre réalisés avant les, soit à un âge de 100 à 132 jours.

	Module d'élasticité (apparent) E_c [kN/mm^2]	Résistance à la traction (essai sur cylindre) f_{ct} [N/mm^2]
G00-I	35.3	2.9
G03-I	40.5	3.9
G06-I	42.9	3.9
G10-I	44.6	3.3
G08-II	42.5	3.9
G09-II	40.6	3.8
G10-II	42.9	3.3

Tableau 4.3: Armatures pour le calcul (selon figure 4.16). Pour les poutres G03 et G06, la semelle tendue contient en fait 4 Ø14 d'armature principale et 4 Ø6 d'armature constructive

	Arm. longitudinale Semelle tendue	Arm. longitudinale semelle comprimée	Arm. longitudinale Ame	Etriers
G00	4 Ø20			
G03	4 Ø15.2			Zone appui Ø8 s = 100
G06	4 Ø15.2	Ø6 s = 80 2 nappes	Ø6 s = 80 2 nappes	
G08	8 Ø6 en 2 nappes			
G09	8 Ø6 en 2 nappes			Zone travée Ø8 s = 200
G10	8 Ø6 en 2 nappes			

En ce qui concerne les caractéristiques des matériaux, les valeurs mesurées en laboratoire ont été utilisées telles quelles (module d'élasticité du béton, résistance à la traction ; tableau 4.2).

Les armatures introduites dans le modèle étaient à peu de choses près celles disposées dans les poutres testées (tableau 4.3). La précontrainte n'étant pas injectée, seul l'effort correspondant a été introduit, sans prise en compte de la section d'acier de précontrainte en tant qu'armature.

Les renforcements des zones d'ancrage aux extrémités de la poutre étant hors de la zone qui nous intéresse, ils n'ont pas été modélisés. Les sections des zones d'ancrage sont identiques aux sections sur appuis.

Concernant la modélisation, il est intéressant de noter que le modèle de coque, habituellement destiné au calcul de structures à parois minces, est utilisé ici pour le calcul d'une poutre à section relativement massive. Cela conduit à des imprécisions au niveau de la modélisation de la section. On voit bien dans la figure 4.17 que certaines zones de la section sont prise en compte deux fois (extrémités de l'âme), tandis que d'autres sont négligées (goussets des semelles). Néanmoins, dans le cas présent, ces imprécisions se compensent presque totalement. Dans une section à parois minces, ce problème est habituellement négligeable, les épaisseurs étant faibles vis-à-vis des dimensions des panneaux.

Résultats

Les figures 4.18 et 4.19 présentent les résultats expérimentaux et numériques pour l'ensemble des poutres testées par Rotilio. La première constatation est que la corrélation est bonne, sauf pour les 3 résultats de l'approche II. Comme précisé plus haut, ces 3 essais se situent à des niveaux de sollicitation proches de la fissuration, précisément dans la zone critique du modèle où la dispersion des résultats est plus importante. Il n'est donc pas surprenant que les résultats soient moins bons pour ces 3 cas.

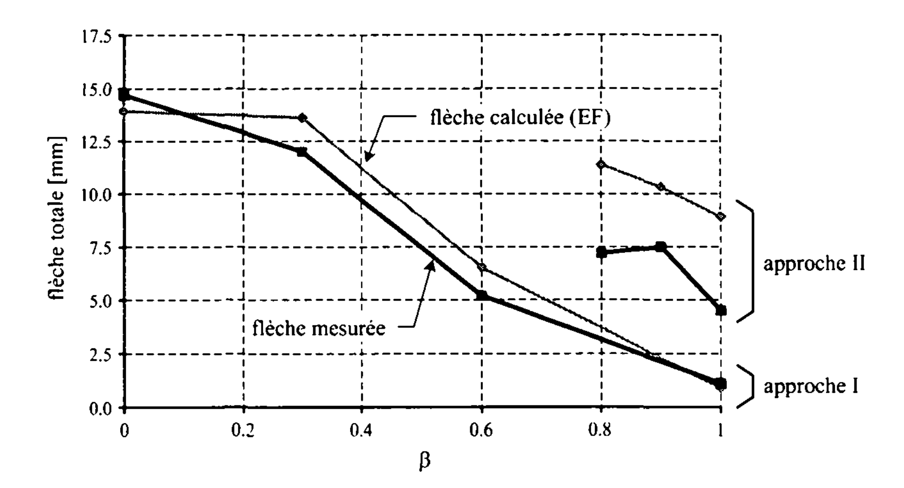


Figure 4.18: Comparaison des flèches mesurées et calculées

Sur la figure 4.19, en plus des valeurs expérimentales et des résultats de calcul par éléments finis, les valeurs données par la LMC sont représentés. La corrélation entre les résultats de la LMC et du calcul EF correspond tout à fait à ce qui a été observé dans le chapitre précédent. La sous-estimation des déformations pour la poutre G00 ($\beta = 0$) provient vraisemblablement d'une surestimation du module d'élasticité du béton (différence déjà constatée par Rotilio sur l'ensemble de la LMC pour cette poutre).

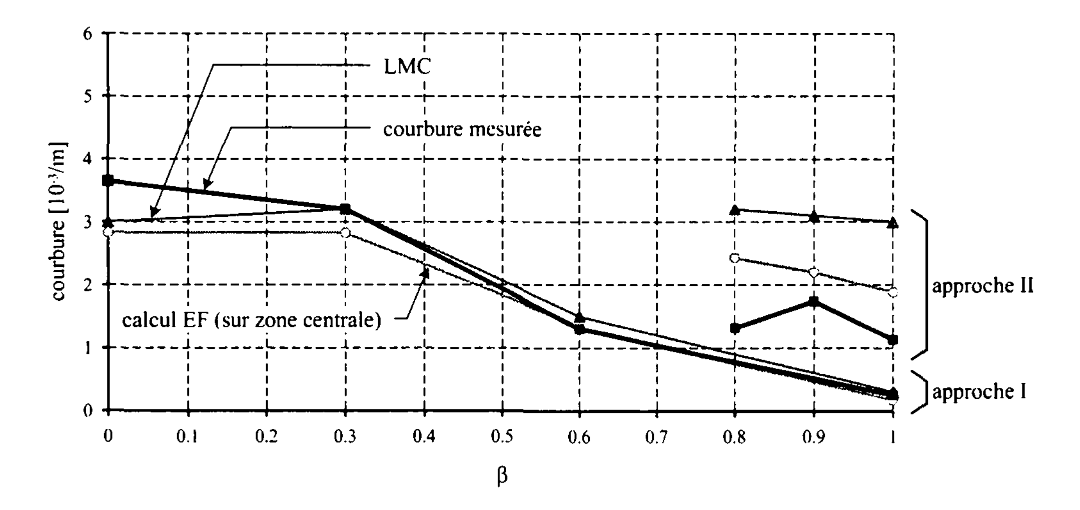


Figure 4.19: Comparaison des courbures mesurées et calculées

En guise de conclusion à ce paragraphe, l'application à plusieurs cas expérimentaux de flexion, simple ou composée, a montré une bonne corrélation entre le modèle développé et les observations, et ce malgré une modélisation par éléments finis relativement grossière (section plutôt massive modélisée en coque) et l'absence totale de calibration des paramètres de calcul (utilisation des valeurs expérimentales brutes).

4.3.2 Eléments de membrane en cisaillement pur

Plusieurs séries d'essais ont été réalisées sur des éléments de voiles en béton armé soumis à des sollicitations bi-axiales, et plus particulièrement à du cisaillement membranaire. De tels essais ont notamment été menés par Vecchio et Collins [75] et Zhang et Hsu [41, 83]. La LTM 2D a été confrontée aux résultats d'essais de ces derniers.

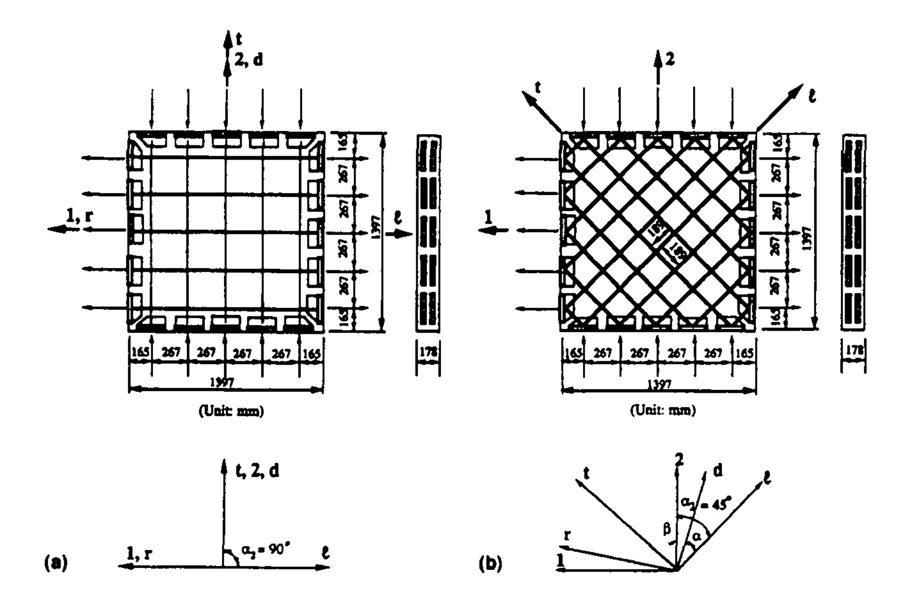


Figure 4.20: Eléments de voile testés par Zhang et Hsu. Eléments avec armatures selon les direction principales (a) et à 45° (b) [83]

Zhang et Hsu ont testé plusieurs séries d'éléments de membrane en béton armé avec différents taux d'armature et qualités de béton (fig. 4.20). Ce sont des éléments carrés de 1397 mm de côté et de 178 mm d'épaisseur. Ils ont été pour la plupart sollicités en cisaillement pur. Deux familles principales peuvent cependant être distinguées : dans certains essais, les armatures étaient disposées selon les directions des effort principaux, et dans les autres à 45° par rapport à ces directions.

Plusieurs séries de résultats ont été comparées à la LTM 2D, mais une seule est présentée ici. Il s'agit d'une série de 5 panneaux en BHP. La disposition des armatures correspond à la figure 4.20b, à part l'écartement des barres. Les valeurs caractéristiques figurent aux tableaux 4.4 et 4.5. L'enrobage moyen des barres d'armatures a été estimé à 3 cm.

Tableau 4.4: Caractéristiques des bétons de la série VA. Les valeurs de E_c et f_{ct} n'étant pas fournies (elles n'interviennent pas directement dans les RA-STM et FA-STM), elles ont été estimées à partir des données disponibles : $E_c = 2 \cdot f'_c / \varepsilon_o$ *et* $f_{ct} = 0.33 \cdot \sqrt{f'_c}$

Essai	Résistance à la compression sur cylindre f'_c [N/mm²]	Déformation pour $\sigma = f'_c$ ε_o [‰]	Module d'élasticité E_c [N/mm²]	Résistance à la traction f_{ct} [N/mm²]
VA0	98.8	2.40	82300	3.3
VA1	95.1	2.45	77600	3.3
VA2	98.2	2.50	78600	3.3
VA3	94.6	2.45	77200	3.2
VA4	103.1	2.35	87700	3.4

Tableau 4.5: Dimensions et armatures de la série VA. Dans cette série, les armatures sont les même dans les 2 directions. A noter que les diamètres effectifs réels des barres sont de 11.3, 15.9, 19.6 et 25.2 mm respectivement.

Essai	Epaisseur h [mm]	Ecartement s [mm]	Ø [mm]	ρ [%]	E_s [kN/mm²]
VA0	178	188	10	0.60	181
VA1	178	94	10	1.20	181
VA2	178	94	15	2.39	192
VA3	178	94	20	3.59	200
VA4	203	94	25	5.24	200

Résultats

Les résultats comparatifs sont présentés à la figure 4.21. Les éléments testés sont sollicités en cisaillement pur. Les résultats représentés sont les contraintes de cisaillement appliquées τ_{lt} en fonction du glissement associé γ_{lt}.

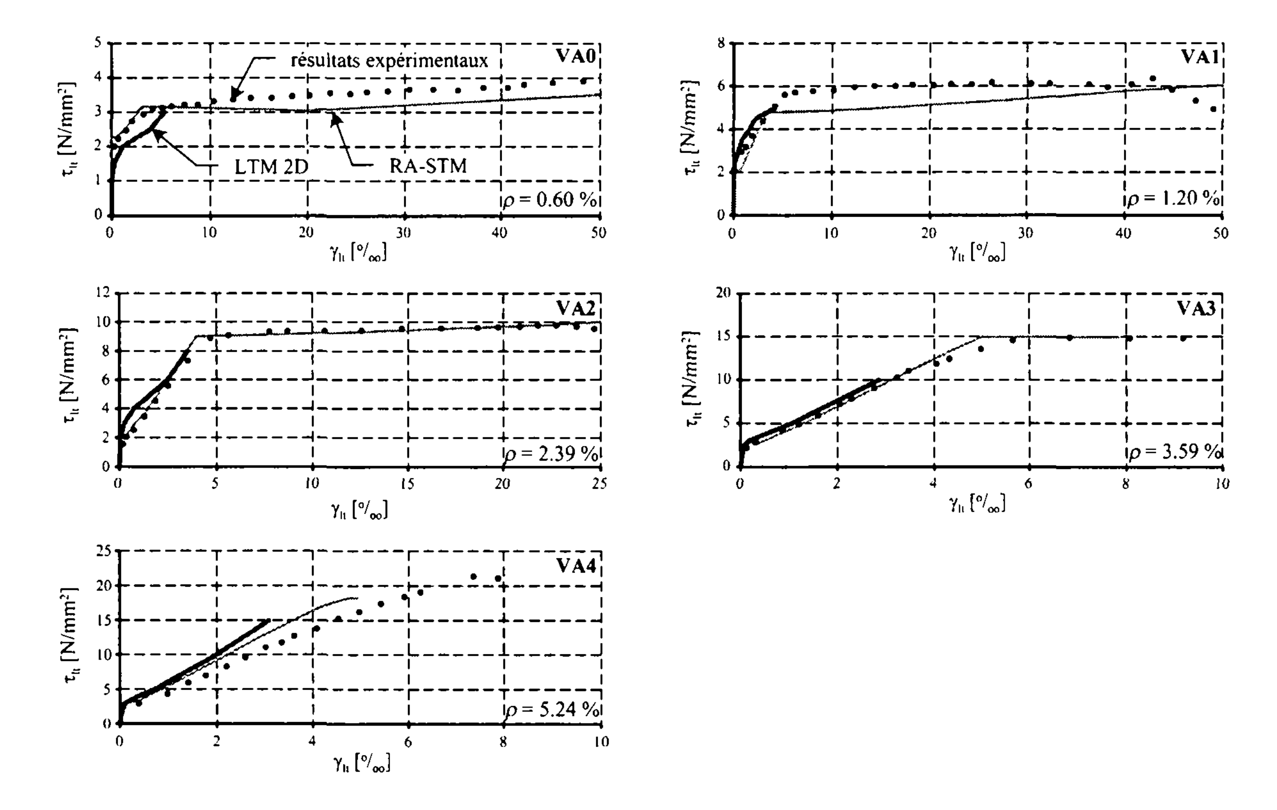


Figure 4.21: Résultats expérimentaux de la série VA et comparaison avec la LTM 2D

Une relativement bonne corrélation peut d'ores et déjà être observée entre les résultats expérimentaux et la LTM 2D. Comme pour les poutres du paragraphe précédent, aucune calibration particulière n'a été opérée sur les caractéristiques des matériaux. De plus, le module d'élasticité du béton et sa résistance à la traction n'étant pas nécessaires dans l'application du Softened Truss Model (RA-STM et FA-STM) utilisé par Zhang et Hsu, ces données n'étaient pas directement disponibles. Elles ont donc été estimées à l'aide des relations suggérées par Vecchio et Collins [75] (voir tableau 4.4).

Il est important de noter que, d'une manière générale, les déviations observées se trouvent au début de la fissuration (VA0, VA1 et VA2). Dans cette zone de la LTM, comme déjà mentionné plus tôt, une erreur sur la résistance à la traction du béton peut être particulièrement sensible.

Le cas du spécimen VA0 est particulier : il a été volontairement sous-armé. Il faut ici se rappeler que ce type de situation a été implémenté dans la LTM essentiellement pour pallier des simplifications dans les données du calcul et éviter des aberrations numériques. Le coefficient définissant la résistance résiduelle a été calibré pour des zones jouant un rôle secondaire dans les déformations d'une structure. Pour une analyse rigoureuse d'un élément de structure fondamentalement sous-armé – ce qui n'est ordinairement pas le cas en pratique – un modèle plus fin est nécessaire. De fait, un tel comportement est pathologique et, s'il est détecté dans une structure, doit être corrigé.

Le cas VA4, fortement armé, montre clairement une surestimation de l'aire d'armature équivalente. Ce comportement est également visible avec le RA-STM. En plus de cela, la surrigidité de la LTM 2D par rapport au RA-STM s'explique par le fait que ce spécimen est surarmé, et que la rupture se fait donc par écrasement du béton, sans plastification des armatures. La LTM 2D utilisant une loi élastique linéaire pour le béton en compression, le RA-STM doit nécessairement s'en écarter quand le niveau de sollicitation du béton augmente, puisqu'il utilise une loi non-linéaire.

Réalisées par les mêmes auteurs, les séries d'essais VB [83] (taux d'armature différents dans les 2 directions), A et F [41] (bétons conventionnels) ont montré des comportements vis-à-vis de la LTM 2D similaires aux résultats présentés ci-dessus.

Des essais, plus anciens, ont également été réalisés par Vecchio et Collins. Là encore, une excellente concordance avec la LTM 2D a été observée, pour autant qu'une zone efficace égale à la totalité de la section soit utilisée. Il s'agit ici d'éléments en micro-béton de 70 mm d'épaisseur, pour lesquels les critères utilisés dans la LTM pour le calcul de la zone efficace semblent inadéquats.

L'ensemble de ces résultats montre que, pour autant que les éléments structuraux aient des caractéristiques raisonnables, la LTM 2D reproduit bien leur comportement à l'état de service.

4.4 Conclusions

Les extensions nécessaires ont été apportées à la LTM pour permettre le calcul de voiles en béton armé. Cette nouvelle LTM 2D a été implémentée dans un élément fini de type coque et un processus itératif général pour le calcul par éléments finis a également été mis en place. Le programme peut donc modéliser et calculer une structure composée de parois minces à comportement essentiellement membranaire. Une procédure d'introduction de la précontrainte au niveau de la structure a été définie. Elle permet de saisir la précontrainte en donnant directement le tracé des câbles, plutôt que des armatures équivalentes et un jeu de forces de remplacement.

Le modèle ainsi développé a été confronté à différents résultats expérimentaux. D'une part des essais de flexion sur des poutres précontraintes en I, d'autre part des essais de cisaillement sur des éléments de voile en BA. Les résultats ont globalement confirmé la bonne tenue du modèle, pour autant que les éléments structuraux calculés aient des caractéristiques raisonnables. La zone de transition proche de la fissuration reste cependant un point sensible du modèle, la détermination des paramètres qui gouvernent cette dernière (notamment la résistance à la traction) étant toujours délicate.

5 Applications

La gamme des structures dont le comportement peut être appréhendé à travers un assemblage d'éléments structuraux membranaires est vaste. Elle englobe aussi bien les poutres cloisons et les murs de contreventement dans les bâtiments que les structures plissées telles que les sheds ou les ponts caisson (pour le comportement global uniquement), ou encore certaines structures de type coque comme une tour de refroidissement.

Le modèle de calcul en coque développé dans les chapitres précédents est destiné au calcul de structures décrites ci-dessus. Ce chapitre présente plusieurs applications numériques, ainsi que certains enseignements qu'on peut en tirer concernant aussi bien le comportement de ces structures que la façon de les calculer. De nouveaux éléments de méthode de calcul viennent également s'ajouter au modèle de calcul en coque, notamment pour déterminer la part de déformation due à l'effort tranchant dans une poutre, ou les contraintes dans les armatures.

5.1 Pont poutre sur 3 travées

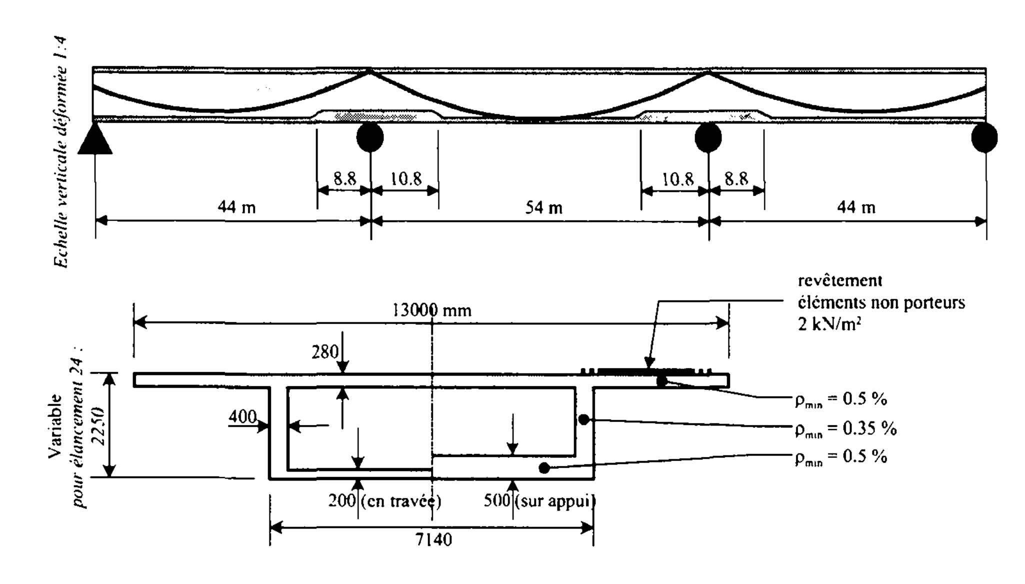


Figure 5.1: Géométrie du pont type pour l'élancement 24

Le pont type étudié dans ce paragraphe est similaire à celui déjà utilisé par Markey [27, 51]. Il s'agit d'un pont à caisson simple sur trois travées de 44, 54 et 44 m (fig. 5.1). La précontrainte a été ajustée pour tenir compte des spécificités de la modélisation. En effet, ce ne sont plus des charges équivalentes qui doivent être définies, mais les tracé des câbles et leur tension. Les charges permanentes appliquées à la structure sont le poids propre et une surcharge de 2 kN/m^2 sur toute la surface du tablier (revêtement).

Une étude paramétrique a été réalisée sur cette structure, les paramètres variables étant la précontrainte – définie par le degré de compensation des déformations – l'élancement, le coefficient de fluage et la résistance à la traction du béton. Les variations d'élancement ont été obtenues en conservant toujours les mêmes portées et en faisant varier la hauteur de la section.

Etant donné les portées considérées, la solution simplement armée ($\beta = 0$) n'est pas réaliste et donnerait lieu à des flèches et une fissuration inacceptables. Elle a cependant été retenue dans les calculs à des fins de comparaison.

Une description des données principales est donnée ci-après. Des informations plus détaillées sont fournies en annexe A.4.

5.1.1 Précontrainte

Le tracé des câbles de précontrainte à été déterminé selon la méthode des charges de balancement. Dans la travée centrale, la flèche du câble est maximale par rapport à la section. Pour les travées de rives, elle a été calculée de façon à balancer la même charge que dans la travée centrale pour une tension donnée du câble. Dans toute cette partie du calcul, seules les forces de déviation verticales ont été prises en compte.

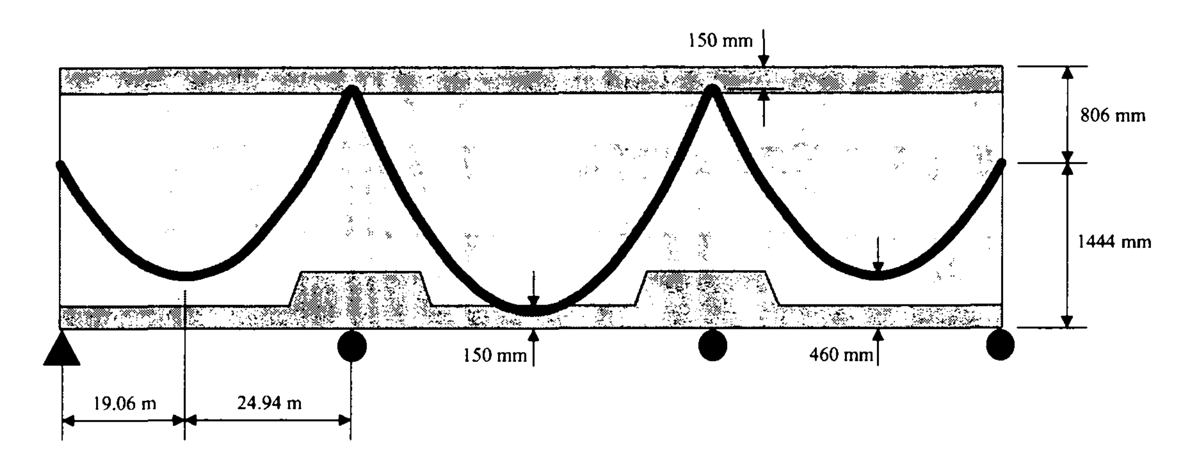


Figure 5.2: Tracé des câbles de précontrainte pour l'élancement 24 (échelle déformée)

Une fois le tracé déterminé, il est introduit dans le modèle d'éléments finis en coque (voir plus loin). C'est par un calcul élastique linéaire à l'aide de ce modèle, soumis à l'ensemble des charges permanentes, que la tension nécessaire pour obtenir un degré de compensation des flèches choisi est obtenue. Cette démarche permet de tenir compte d'un seul coup de tous les paramètres qui échappent à la méthode des charges de balancement : influence des forces d'ancrages de la précontrainte, changements d'axe d'inertie de la section sur appui, déformations d'effort tranchant et de cisaillement dans le tablier, rigidité propre des câbles de précontrainte.

Le degré de compensation des déformations β étant le paramètre essentiel de cette étude, la quantité de précontrainte nécessaire pour annuler la flèche au milieu de la travée centrale, soit $\beta = 1$, a été calculée (tab. 5.1). La tension admise dans les câbles est de

$$\sigma_{P\infty} = 0.85 \cdot 0.7 \cdot f_{tk} = 0.85 \cdot 0.7 \cdot 1770 = 1053\ N/mm^2$$

y compris 15 % de pertes à long terme. Pour les autres valeurs de β, l'aire des câbles s'obtient en multipliant par β.

Tableau 5.1: Paramètres de la précontrainte pour les différents élancements pour β = 1 ; pour la géométrie, voir figure 5.2

Elancement	Aire A_p [mm²]	Tension P_∞ [kN]	Niveau ancrage [mm]	Point bas dans la travée de rive	
				Abscisse [m]	Niveau [mm]
16	11347	11950	2135	18.82	615
20	13788	14521	1722	19.01	490
24	15820	16661	1444	19.06	460
28	18694	19688	1241	19.20	399

5.1.2 Dimensionnement des armatures passives

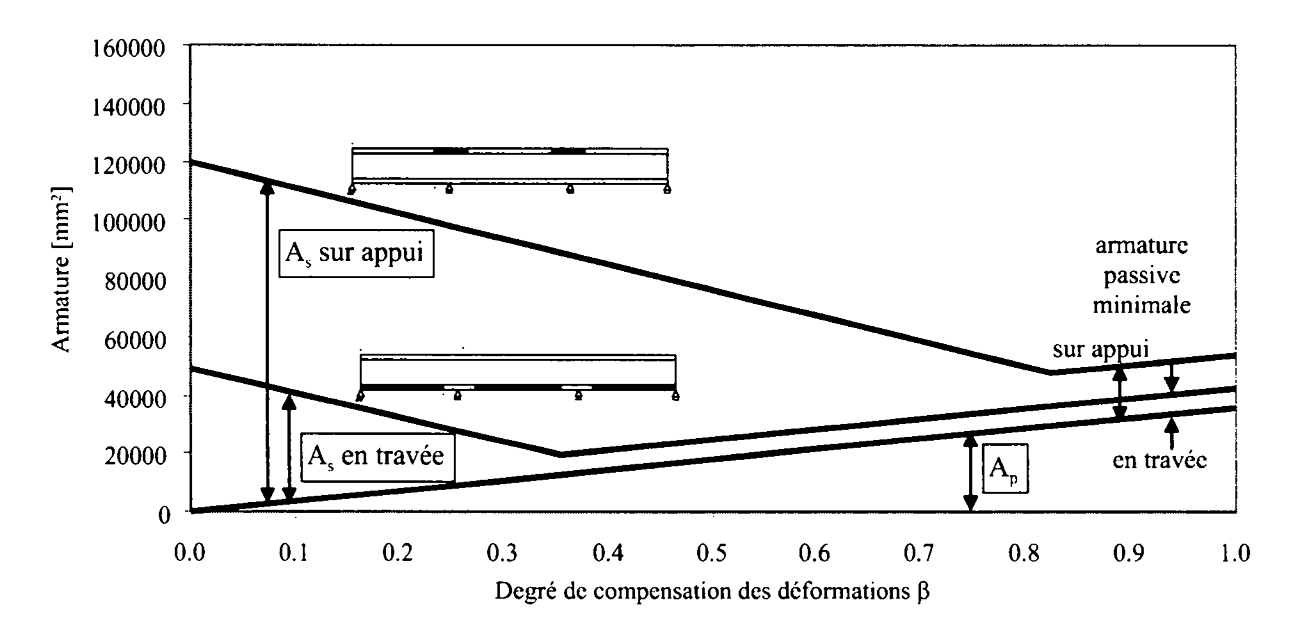


Figure 5.3: Sections d'armatures nécessaires (élancement 24) en fonction du degré de compensation des déformations [37]

Les armatures longitudinales calculées par Markey ont été réutilisées telles quelles. Par contre, il a été nécessaire de dimensionner les armatures transversales et les étriers. Ce dimensionnement a été réalisé selon l'Eurocode 2 [37]. L'ensemble des armatures varie en fonction de l'élancement du pont et du degré de compensation des déformations. A titre

d'exemple, la figure 5.3 donne les sections d'armatures longitudinales dans les dalles inférieure et supérieure pour le pont d'élancement 24.

Ajoutons encore que, étant donné la nature des calculs effectués, il a été nécessaire de renforcer les armatures dans les zones d'ancrage des câbles, de façon à éviter une fissuration et des déformations excessives.

5.1.3 Réseau d'éléments finis

Etant donné les conditions de symétrie du problème, seulement un quart de la structure a été modélisé (fig. 5.4). Dans la perspective, on voit également les entretoises sur l'appui intermédiaire (au milieu) et sur l'appui de rive (à droite).

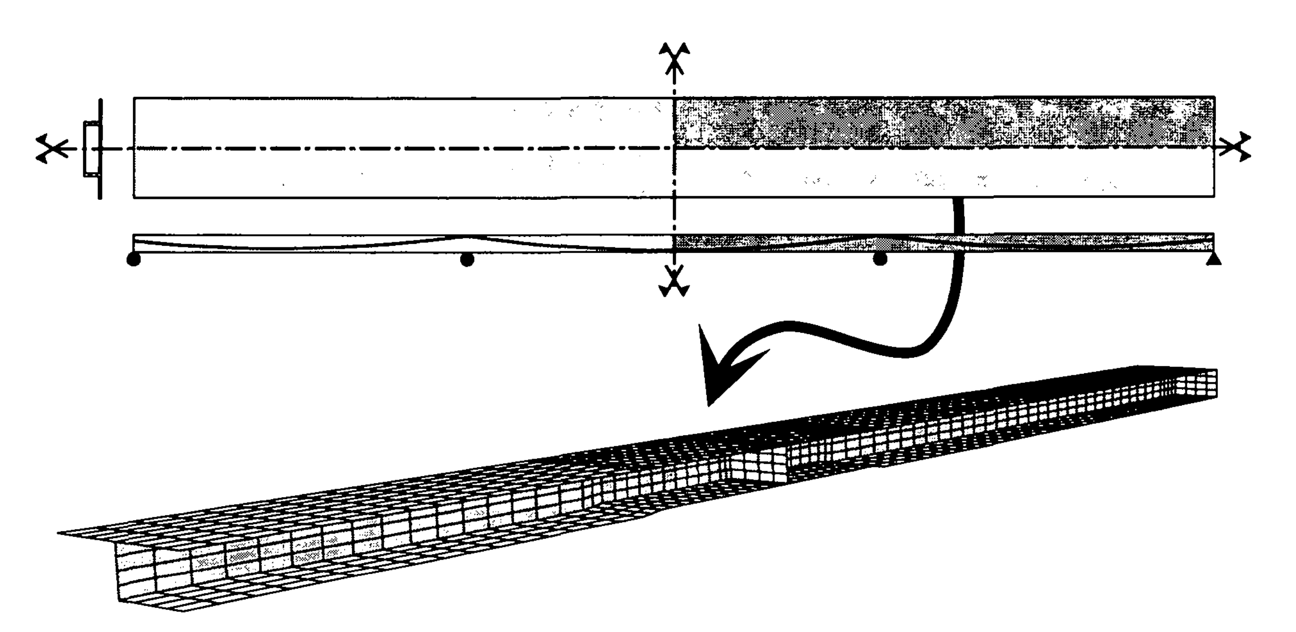


Figure 5.4: Modélisation d'un quart du pont type en utilisant les symétries de la structure. Réseau d'éléments finis utilisé.

5.1.4 Paramètres variables

Comme déjà mentionné, les paramètres variables de cette étude paramétrique sont :

- Le degré de compensation des déformations ; β = 0.0, 0.3, 0.6, 0.8 et 1.0
  La précontrainte introduite dans la structure est pondérée par le facteur β (tableau 5.1). Les armatures passives dépendent également de β (voir annexe A.4).
- L'élancement ; λ = **16**, 20, **24** et 28
  Les différents élancements sont obtenus en variant la hauteur de la section. Elle vaut 3.375 m, resp. 2.700 m, 2.250 m et 1.929 m. Les armatures passives et la précontrainte sont fonctions de λ.

- Le coefficient de fluage ; φ = 1.5, **2.5** et 3.5
- La résistance à la traction ; f_{ct} = 0.5, 1.5, **2.5**, 3.5 et 4.5 N/mm^2

Le degré de compensation des déformations a été varié systématiquement. Deux valeurs d'élancement ont généralement été utilisées, soit 16 et 24. Pour les autres paramètres, les valeurs de référence sont indiquées en gras ci-dessus.

Le module d'élasticité du béton E_c a été gardé constant. La méthode de calcul du fluage se basant sur le principe du module ajusté, une variation de E_c aurait engendré exactement les mêmes effets qu'une variation du coefficient de fluage.

- E_c = 30 GPa

5.1.5 Résultats

La structure étudiée ici est fondamentalement de type barre. Elle répond a priori aux critères qui permettent de la considérer comme telle et donc de l'analyser par un modèle de calcul du même type. La ligne directrice de cette étude paramétrique est, dans un premier temps, de reconstituer les calculs en barres réalisés par Markey, afin de déterminer si l'approche d'une telle structure par un modèle de calcul en coque met en évidence des comportements hors de portée d'un calcul en barres.

5.1.5.1 Flèches

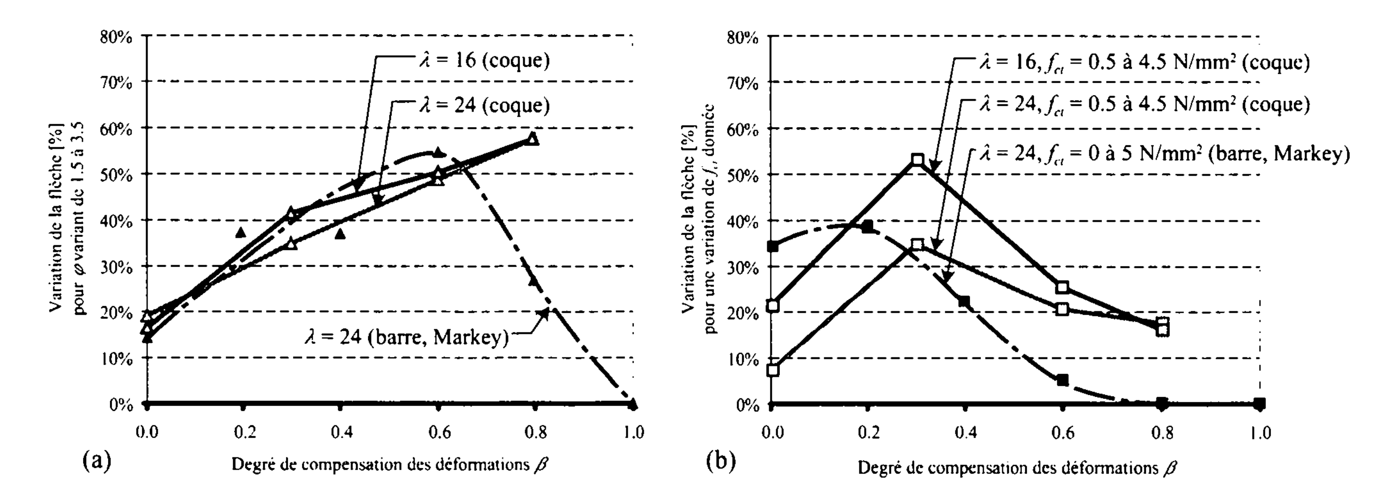


Figure 5.5: Variation possible de la flèche en fonction du degré de compensation des déformations pour la poutre sur 3 travées (a) pour une variation du coefficient de fluage (b) pour une variation de la résistance à la traction

Les données des calculs en barre et en coque n'étant pas exactement les mêmes, les flèches brutes ne sont pas présentées ici. En revanche, les résultats relatifs peuvent être comparés.

D'une manière générales, les tendances observées au niveau des flèches ont confirmé les résultats obtenus dans l'analyse du système en barres. L'incertitude sur le calcul de la flèche diminue avec l'augmentation de la quantité de précontrainte. Cette tendance est bien marquée en ce qui concerne l'influence de la résistance à la traction du béton (fig. 5.5b). Des divergences apparaissent néanmoins, pour lesquelles des explications sont fournies ci-après.

La figure 5.5 montre l'augmentation de la flèche au milieu de la travée principale en fonction du degré de compensation des déformations β lorsque le coefficient de fluage φ augmente (a) et lorsque la résistance à la traction f_{ct} diminue (b). Les résultats pour $\beta = 1$ ne sont pas représentés car ce sont des rapports de très petites valeurs qui ne sont pas significatifs.

Sensibilité du coefficient de fluage

Les augmentations de flèches dues à une variation du coefficient de fluage (a) montrent une excellente corrélation avec le calcul en barre jusqu'à $\beta = 0.6$ pour les deux élancements représentés (λ = 16 et 24). Théoriquement, en stade homogène et sans tenir compte de l'effet rigidifiant des armatures, l'augmentation des déformations due au fluage est égale à $1+\varphi$. L'augmentation théorique de la flèche pour le passage de φ de 1.5 à 3.5 est donc égale à

$$\frac{(1+\varphi_{max})-(1+\varphi_{min})}{1+\varphi_{réf}} = \frac{1+3.5-1-1.5}{1+2.5} = 57\ \% \qquad (5.1)$$

L'effet de la fissuration tend à réduire l'influence du fluage sur la structure. Il en va de même pour les armatures. Donc, l'augmentation de flèche pour une variation de φ donnée doit nécessairement être inférieure ou égale à la valeur donnée par l'équation 5.1, les résultats obtenus pour des valeurs élevées de β devant logiquement se rapprocher de cette limite théorique. Ce comportement est effectivement observable pour β = 0.8 dans les résultats des calculs en coque. A ce stade, la précontrainte est telle que la flexion n'engendre plus aucune fissuration. La valeur théorique pour β = 1 est toujours, à peu de choses près, la valeur limite définie ci-dessus, cependant les flèches très faibles – voire nulles – qui sont en jeu à ce moment expliquent le dernier point de la courbe du calcul en barres, point qui n'est pas représenté dans les résultats de calculs en coque.

Sensibilité de la résistance à la traction du béton

A la figure 5.5b, l'allure générale des courbes obtenues est similaire aux résultats du calcul en barres. Le principe de réduction de l'incertitude sur la flèche pour des valeurs élevées de β reste valable. Il faut cependant noter que les valeurs numériques sont passablement différentes, ce qui s'explique par plusieurs raisons.

Tout d'abord, la fourchette de valeurs de la résistance à la traction n'est pas la même pour les deux séries de calculs. Les calculs en barres la font varier de 0 à 5 N/mm^2 et les calculs en coque de 0.5 à 4.5 N/mm^2. De plus, la structure étant plus chargée dans les calculs en coque (revêtement), la fissuration est plus importante et les flèches plus grandes, ce qui réduit l'importance relative de ce paramètre. C'est cela qui explique en grande partie les valeurs passablement plus faibles obtenues pour $\beta = 0$.

Les différences entre les deux élancements (16 et 24) disparaissent pour les valeurs élevées de β, du fait de l'absence de fissuration flexionnelle. Pour les valeurs inférieures de β, les différences sont imputables à la plus grande sensibilité des sections trapues à la résistance à la traction, tant en flexion qu'en déformation d'effort tranchant.

5.1.5.2 Déformations dues à l'effort tranchant

Traditionnellement, les déformations dues à l'effort tranchant sont négligées lors du calcul d'une structure de type barre. Néanmoins, en effectuant un simple calcul en barre élastique linéaire, les déformations dues à l'effort tranchant peuvent engendrer une augmentation de la flèche allant jusqu'à 10 à 20 % de la flèche due à la flexion seule, et ce pour des élancement tout à fait courants. A titre d'exemple, le tableau 5.2 montre les augmentations de flèche dues à l'effort tranchant calculées pour une poutre bi-encastrée ayant les mêmes caractéristiques que la travée centrale du pont type (fig. 5.1).

Tableau 5.2: Augmentation de la flèche élastique linéaire due à l'effort tranchant

Elancement	Augmentation due à l'effort tranchant de la flèche élastique linéaire
16	19.1 %
20	14.3 %
24	11.2 %
28	9.0 %

Il est relativement aisé, dans un calcul en barres élastique linéaire, de dissocier les déformations flexionnelles de celles dues à l'effort tranchant. Il suffit pour cela d'effectuer deux calculs séparés, une fois en tenant compte de ce phénomène, et une fois en le désactivant, puis de comparer les résultats. Dans un calcul non linéaire, il n'est pas possible de calculer séparément ces deux composantes, le comportement des matériaux étant lié à l'interactions de tous les efforts et déformations – c'est le même problème que pour les actions (chap. 2). De plus, le modèle de calcul en coque, utilisé ici essentiellement comme assemblage d'éléments de membrane, traite implicitement tous les effets de cisaillement, y compris l'effort tranchant et la torsion, sous forme de cisaillement membranaire des éléments de voile qui composent la structure. Il n'est donc pas possible de « désactiver » le cisaillement, sous peine d'empêcher complètement la structure de se déformer.

Méthode de décomposition de la déformée

Il a donc fallu mettre au point une méthode qui permette de séparer les déformées de flexion et d'effort tranchant, connaissant par exemple la déformée complète d'une âme de pont. La méthode présentée ici est en partie inspirée d'une démarche proposée par Debernardi [22] pour la détermination expérimentale des déformations d'effort tranchant. Comme on le voit à la figure 5.6, l'âme du pont – discrétisée en éléments finis – peut être découpée en cellules rectangulaires contiguës, dont le calcul fournit les déplacements de chaque nœud.

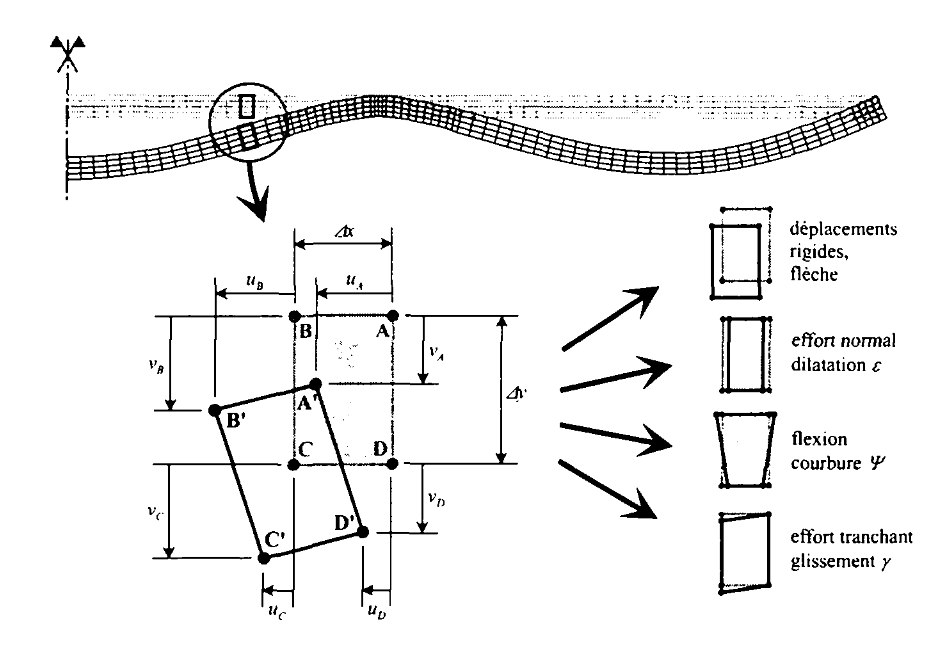


Figure 5.6: Principe de décomposition des déformations dans l'âme de la poutre

De la figure 5.6, on tire la courbure moyenne et le glissement moyen sur chaque module ABCD

$$\psi(x+\Delta x/2)=\frac{\Delta\varepsilon_x}{\Delta y}\cong\frac{\dfrac{u_A-u_B}{\Delta x}-\dfrac{u_D-u_C}{\Delta x}}{\Delta y}=\frac{u_A-u_B+u_C-u_D}{\Delta x\cdot\Delta y} \tag{5.2}$$

$$\gamma(x+\Delta x/2)=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\cong\frac{\dfrac{u_A+u_B}{2}-\dfrac{u_C+u_D}{2}}{\Delta y}+\frac{\dfrac{v_A+v_B}{2}-\dfrac{v_C+v_D}{2}}{\Delta x}$$
$$=\frac{u_A+u_B-u_C-u_D}{2\cdot\Delta y}+\frac{v_A+v_B-v_C-v_D}{2\cdot\Delta x} \tag{5.3}$$

Le but étant de calculer les déplacements verticaux, la dilatation longitudinale peut être négligée. On définit aussi, afin de disposer d'une référence de calage, la flèche à mi-hauteur de la section

$$v_m(x)=\frac{v_A+v_D}{2} \tag{5.4}$$

En partant d'une extrémité de la poutre et en imposant des conditions géométriques aux appuis et axes de symétrie (fig. 5.7), il est possible de reconstituer séparément les déformées de la poutre dues à la flexion (éq. 5.5, 5.6 et 5.7) et à l'effort tranchant (éq. 5.8)

$$\bar{v}_{\psi}(x+\Delta x)=\bar{v}_{\psi}(x)+\bar{v}'_{\psi}(x+\Delta x/2)\cdot\Delta x \quad (5.5)$$

$$\bar{v}'_{\psi}(x+\Delta x/2)=\tfrac{1}{2}(\bar{v}'_{\psi}(x)+\bar{v}'_{\psi}(x+\Delta x)) \quad (5.6)$$

$$\bar{v}'_{\psi}(x+\Delta x)=\bar{v}'_{\psi}(x)+\psi(x+\Delta x/2) \quad (5.7)$$

$$\bar{v}_{\gamma}(x+\Delta x)=\bar{v}_{\gamma}(x)+\gamma(x+\Delta x/2)\cdot\Delta x \quad (5.8)$$

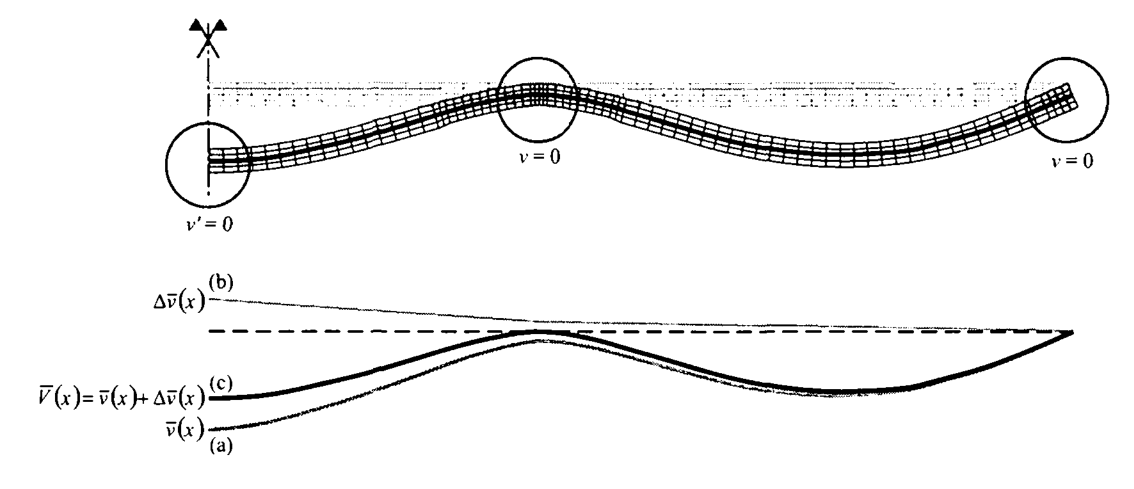


Figure 5.7: Conditions de bord et calage des déformées reconstituées

La reconstitution brute d'une déformée par différences finies à partir d'une extrémité amène généralement une accumulation de petites erreurs, ce qui conduit à une déformée qui respecte la condition de bord initiale, mais pas les autres (fig. 5.7a). Il est nécessaire d'appliquer une correction à la déformée brute. Ici, une correction linéaire par travée est ajoutée à la déformée brute (fig. 5.7b). Ainsi, la déformée obtenue respecte toutes les conditions de bord (fig. 5.7c). Cette procédure doit être appliquée séparément aux déformées de flexion et d'effort tranchant, ainsi qu'à la déformée de référence – les conditions de bord géométriques, issues d'un raisonnement en barres, ne sont pas forcément rigoureusement respectées.

$$\bar{V}_{\psi}(x)=\bar{v}_{\psi}(x)+\Delta\bar{v}_{\psi}(x) \quad (5.9)$$

$$\bar{V}_{\gamma}(x)=\bar{v}_{\gamma}(x)+\Delta\bar{v}_{\gamma}(x) \quad (5.10)$$

$$V_{m}(x)=v_{m}(x)+\Delta v_{m}(x) \quad (5.11)$$

Enfin, la flèche totale reconstituée est donnée par

$$\bar{V}_{m}(x)=\bar{V}_{\psi}(x)+\bar{V}_{\gamma}(x) \quad (5.12)$$

La répartition des deux composantes au point de la déformée où la flèche est maximale donne les parts de flèche dues à l'effort tranchant et à la la flexion. La comparaison avec $V_m(x)$

permet d'évaluer la précision du calcul. Dans tous les résultats obtenus par cette méthode, l'écart est toujours inférieur à 3 % en tout point de la déformée.

A titre de validation, les valeurs du tableau 5.2, obtenues par un calcul en barres, se retrouvent dans les résultats des calculs élastiques linéaires en coque pour $\beta = 0$ à la figure 5.8.

Déformations d'effort tranchant dans le pont type

Plus l'élancement est élevé, plus les déformations d'effort tranchant sont faibles vis à vis de la flexion. Ce fait est bien connu, quoique généralement négligé dans les calculs de poutres. Les résultats élastiques linéaires du tableau 5.2 ont cependant déjà montré que pour un élancement de 16, ce qui n'est pas extraordinairement faible, la part de flèche due à l'effort tranchant est de l'ordre de 20 %. Ce qui signifie qu'un calcul classique en poutre sous-estime d'autant la flèche de cette poutre.

Une tendance générale qui ressort des figures 5.8 à 5.11 est que la part de déformations d'effort tranchant augmente avec β déjà dans les résultats *élastiques linéaires*. Le manque d'affinité entre les déformées dues aux charges permanentes et à la précontrainte fait que, pour des degrés de compensation élevés, les deux types de déformations finissent par être du même ordre de grandeur. A la limite, pour $\beta = 1$, les irrégularités géométriques du système statique de la structure (changements d'épaisseur, d'axe d'inertie) font que les diagrammes de moment de flexion et d'effort tranchant ne sont pas nuls en tout point. Une flèche nulle à mi-travée dans une telle configuration peut donc correspondre à une compensation totale des déformations de flexion et d'effort tranchant, soit une répartition moitié-moitié, ou plus exactement de signes opposés.

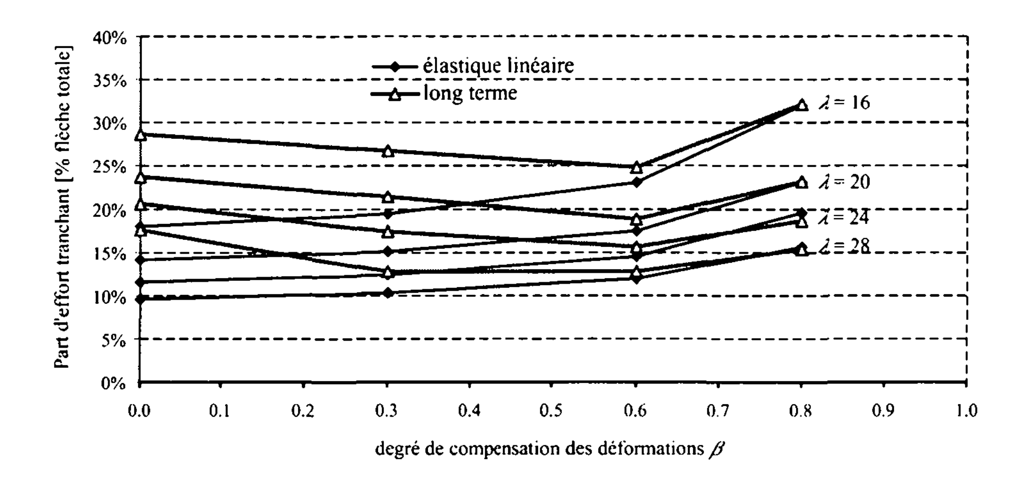


Figure 5.8: Part de la flèche due à l'effort tranchant en fonction du degré de compensation des déformations pour différentes valeurs d'élancement. $\varphi = 2.5$, $f_{ct} = 2.5\ N/mm^2$.

NB : pour les mêmes raisons qu'au paragraphe précédent, les résultats pour β=1 ne sont pas représentés sur les graphiques

D'après ces mêmes graphiques, la part de flèche due à l'effort tranchant est susceptible d'atteindre 30 % avec la fissuration pour les valeurs faibles de β. Le point important ici est que cette part de déformations d'effort tranchant varie avec la fissuration. Dans un calcul en barres à l'aide d'une loi moment-courbure, à défaut d'indication sur le comportement à l'effort tranchant, la solution la plus simple est de conserver la part de déformations d'effort tranchant égale à sa valeur élastique linéaire. Comme on le voit ici, cette hypothèse n'est pas conservatrice pour $\beta < 0.6$ et peut conduire à sous-estimer la flèche d'une quantité allant jusqu'à 10 % de la flèche totale.

La figure 5.8 montre que l'importance des déformations d'effort tranchant augmente quand l'élancement diminue, ainsi que leur variation. Par contre, elles ne sont pas sensibles aux variations du coefficient de fluage (fig. 5.9). En effet, le pourcentage de la flèche dû à l'effort tranchant est pratiquement le même pour $\varphi = 1.5$, 2.5 ou 3.5.

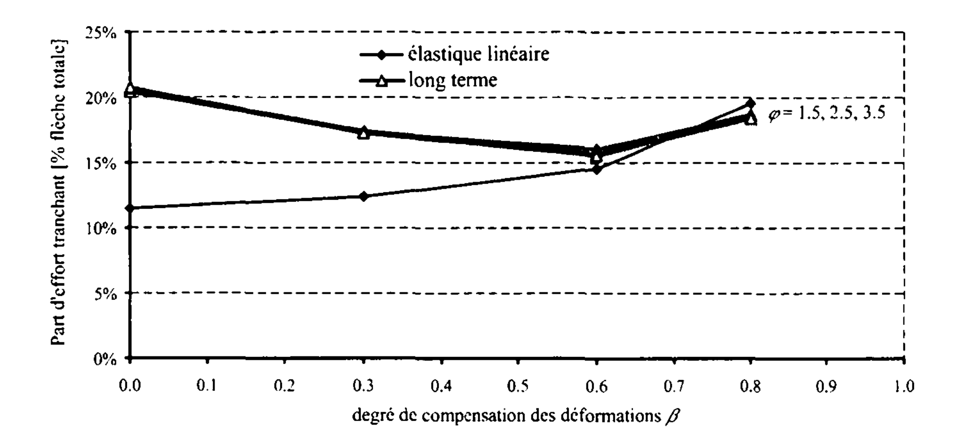


Figure 5.9: Part de la flèche due à l'effort tranchant en fonction du degré de compensation des déformations pour différentes valeurs de φ. Elancement $\lambda = 24, f_{ct} = 2.5$ N/mm^2.

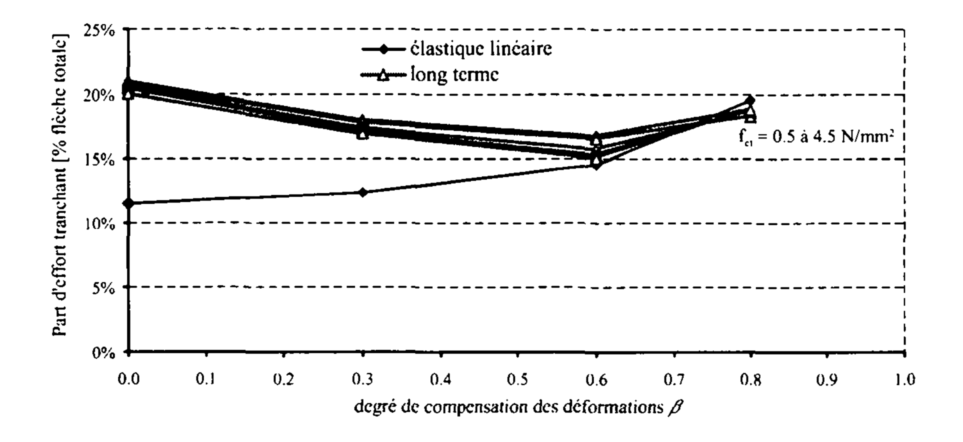


Figure 5.10: Part de la flèche due à l'effort tranchant en fonction du degré de compensation des déformations pour différentes valeurs de f_{ct}. Elancement $\lambda = 24$, $\varphi = 2.5$.

La sensibilité vis à vis de la résistance à la traction dépend de l'élancement, ce qui va dans le même sens que les remarques précédentes. Pour une poutre relativement élancée ($\lambda = 24$,

fig. 5.10), une variation de f_{ct} de 0.5 à 4.5 N/mm^2 engendre 1 à 2% de variation de la part de déformations d'effort tranchant. Cette variation passe à 4% pour une poutre plus trapue (λ = 16, fig. 5.11).

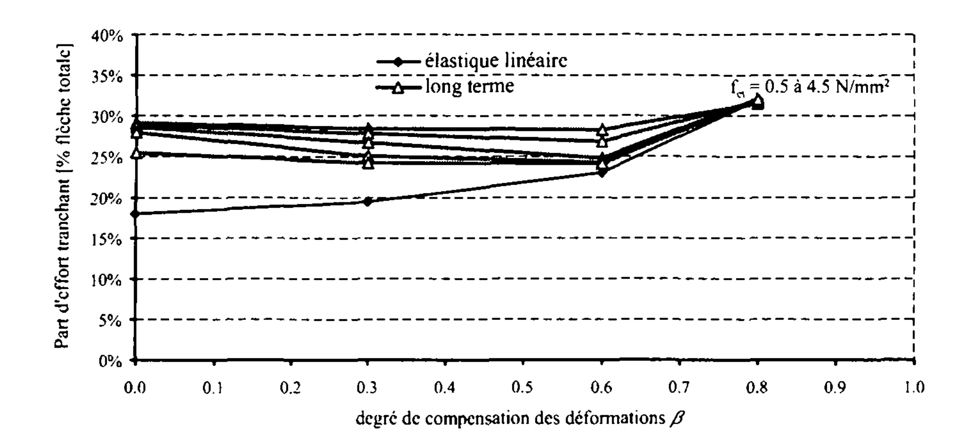


Figure 5.11: Part de la flèche due à l'effort tranchant en fonction du degré de compensation des déformations pour différentes valeurs de f_{ct}. Elancement λ = 16, φ = 2.5.

Synthèse

Les déformations d'effort tranchant peuvent représenter jusqu'à 30 % de la flèche totale pour des poutres d'élancement courant. Les négliger peut donc complètement fausser un calcul à l'état de service d'une structure. De plus la fissuration tend à augmenter cet effet, et ce d'autant plus que l'élancement de la poutre est faible. Il faut cependant retenir deux points importants :

- La fissuration n'a une réelle influence sur les déformations d'effort tranchant que pour de faibles degrés de compensation des déformations. Cette incertitude peut donc être contournée en utilisant une précontrainte telle que $\beta \geq 0.6$.
- Pour $\beta \geq 0.6$, la part de flèche due aux déformations d'effort tranchant est égale à sa valeur élastique linéaire, indépendamment des autres facteurs non-linéaires. Partant de là, une démarche basée sur l'hypothèse que la rigidité à l'effort tranchant varie de la même façon que la rigidité flexionnelle – calculée par exemple à l'aide d'une loi moment-courbure – est tout à fait correcte.
- Pour effectivement calculer les cas où $\beta < 0.6$, on peut en première approximation obtenir une fourchette de valeurs en effectuant deux calculs, l'un avec la rigidité à l'effort tranchant nominale, l'autre en réduisant cette rigidité d'un facteur 2 (cf fig. 5.8 à 5.11), ce qui correspond au doublement de la part de déformations d'effort tranchant.

5.1.5.3 Largeur efficace

Le concept de largeur efficace est couramment utilisé dans les calculs de flèches pour tenir compte de la déplanation transversale des sections dans les zones d'introduction de charges concentrées, et plus particulièrement les zones d'appuis. La non uniformité des contraintes sur la largeur des dalles de ponts (fig. 5.12) – essentiellement le tablier sur les appuis intermédiaires – engendre un assouplissement significatif de la structure, d'où une augmentation des flèches. L'utilisation de la largeur efficace permet d'obtenir une réduction équivalente de la rigidité des sections concernées.

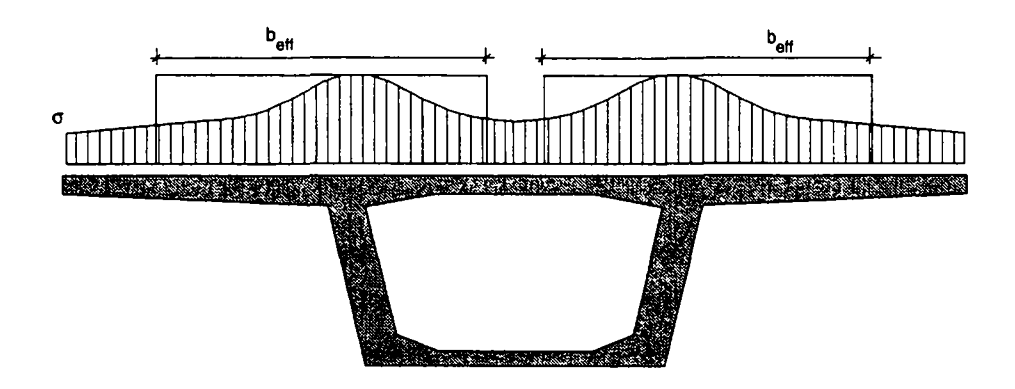


Figure 5.12: Définition de la largeur efficace d'un tablier de pont [27]

La figure 5.13 montre l'augmentation de flèche élastique linéaire pour une poutre bi-encastrée ayant les mêmes caractéristiques que la travée centrale du pont type. Ces calculs ont été effectués à l'aide d'un modèle barre, et la largeur efficace a été réduite sur 15 % de la portée à chaque extrémité de la poutre. Même pour des réductions importantes de la largeur efficace, l'influence de l'élancement reste faible.

La plupart des normes proposent des formulations pour le calcul de la largeur efficace. Citons ici à titre d'exemple celle proposée par Hassan [27,36] qui est particulièrement adaptée pour ce type de structure, ayant été calibrée d'après un vaste échantillon de ponts existants. La largeur efficace selon l'équation 5.13 doit être appliquée sur une longueur égale à 15% de la portée, de part et d'autre des appuis intermédiaires.

$$\frac{b_{eff}}{b_{tot}} = 0.28 + 0.06 \cdot \frac{n \cdot \ell}{b_{tot}} \ngtr 1 \qquad (5.13)$$

n étant le nombre d'âmes, ℓ la portée moyenne et b_{tot} la largeur totale du tablier.

Dans un calcul en coque, même élastique linéaire, les variations transversales de contraintes à l'intérieur des sections sont implicitement prise en compte. Il n'y a donc pas besoin de tenir compte d'une largeur efficace réduite dans les zones d'introduction de forces. Il est même possible, sur la base des distributions transversales de contraintes obtenues, de calculer la

largeur efficace réelle. Il suffit pour cela de diviser l'effort normal total passant dans la dalle par la valeur de la contrainte maximale :

$$b_{eff} = \frac{1}{\sigma_{max}} \cdot \int_{b_{tot}} \sigma \cdot \mathrm{d}b \qquad (5.14)$$

Il convient toutefois d'être prudent quant à l'utilisation de cette équation (voir plus bas). L'intérêt principal du calcul en coque non linéaire est ici de vérifier si la largeur efficace est influencée par les non linéarités matérielles du béton armé, plutôt que de calculer sa valeur effective.

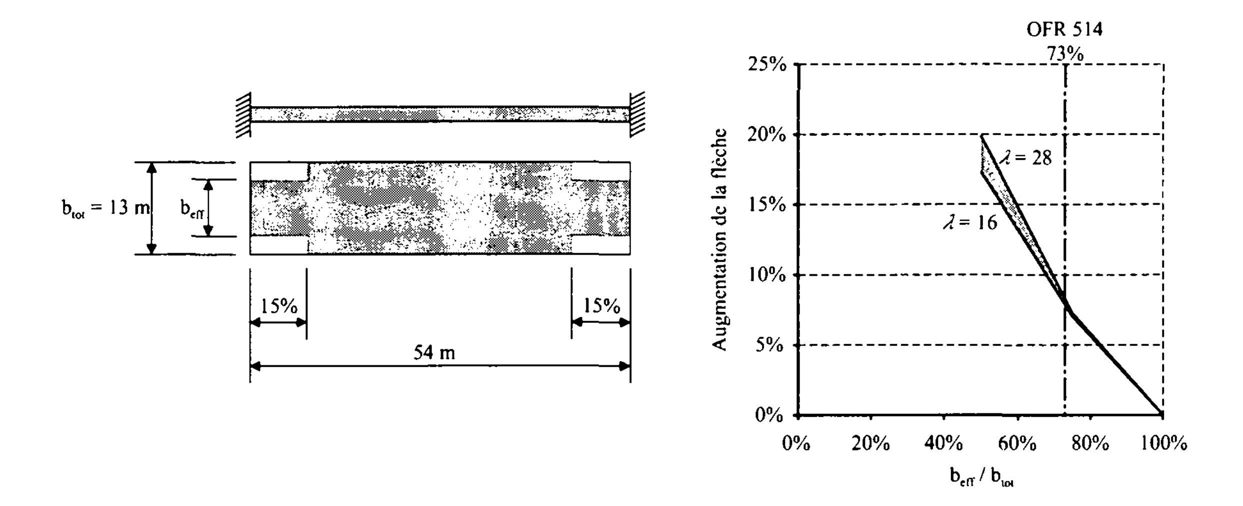


Figure 5.13: Augmentation de la flèche élastique linéaire en fonction de la réduction de largeur efficace du tablier sur appui. Valeurs obtenues pour une poutre bi-encastrée avec les mêmes caractéristiques que la portée centrale du pont type (fig. 5.1).

Résultats

La figure 5.14 présente un échantillon représentatif des résultats obtenus par calcul non linéaire en coque. Il s'agit ici du pont *moyen*, d'élancement 24, avec un coefficient de fluage $\varphi = 2.5$ et une résistance à la traction du béton $f_{ct} = 2.5$ N/mm^2. La partie gauche de la figure montre l'état de contraintes dans le tablier sur un appui intermédiaire, en élastique linéaire, à court terme et à long terme. Le diagramme de la partie droite montre les largeurs efficaces relatives calculées par l'équation 5.14 sur la base des distributions de contraintes observées. Une valeur indicative de largeur efficace de calcul est également indiquée. Elle a été déterminée selon la méthode proposée par Hassan [27,36].

La première constatation est que la largeur efficace calculée dépend très fortement du degré de compensation des déformations. Pour $\beta = 0.6$, la largeur efficace ne peut même pas être définie de façon claire, du fait du changement de signe des contraintes. Cela peut paraître étonnant au premier abord, si l'on sait que les normes fournissent une définition de la largeur

efficace qui ne dépend que de la géométrie de la structure. L'examen de l'équation 5.15, bien connue pour son application au calcul de sections planes, permet d'y voir plus clair.

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} \tag{5.15}$$

La largeur efficace réduite est destinée à prendre en compte l'effet de l'introduction de forces concentrées perpendiculaires à la poutre telles que les réactions d'appuis. Elle est directement liée à la flexion et intervient donc dans le calcul du moment statique W de la section. Par contre, un effort normal centré entraîne une distribution des contraintes essentiellement uniforme, sauf dans les zones d'introduction de précontrainte où les perturbations sont très localisées. Du fait de la longueur nécessaire à l'introduction de l'effort de précontrainte dans la section à partir des ancrages, ces perturbations ont une influence défavorable sur l'efficacité de la précontrainte, mais pas sur les déformations verticales du système. L'aire A de la section n'a donc pas a être affectée par la réduction de largeur efficace.

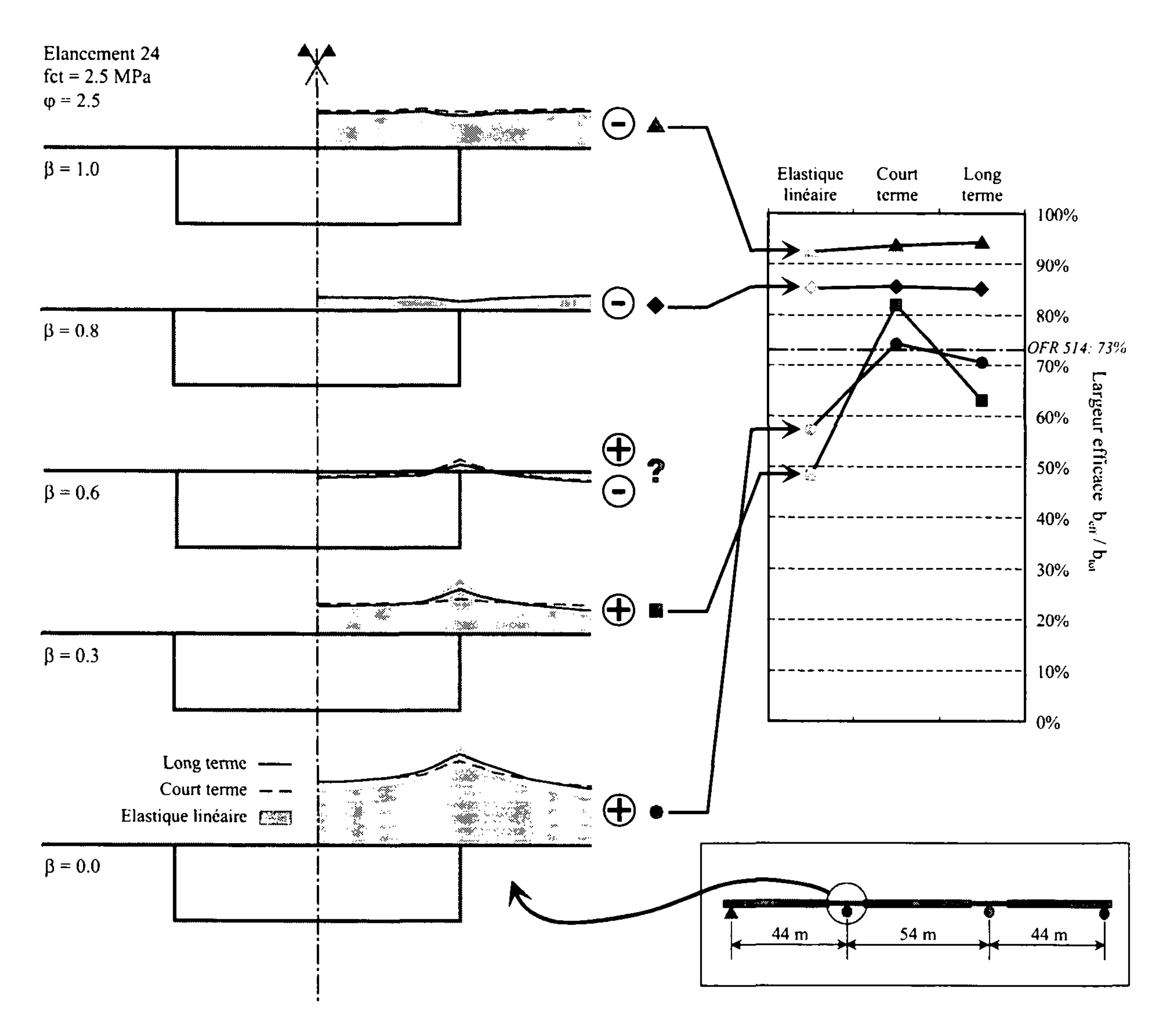


Figure 5.14: Contraintes longitudinales moyennes dans le tablier sur appui intermédiaire et largeurs efficaces relatives déduites

Or, dans les résultats du calcul en coque, il n'est pas possible de dissocier aisément les effets de la flexion et de l'effort normal. Cela est d'autant plus vrai pour un calcul non linéaire, toujours pour les raisons mentionnées dans le contexte des combinaisons d'actions au chapitre 2. Les contraintes issues d'un tel calcul englobent nécessairement tous les effets de flexion et d'effort normal. De plus, il ne faut pas perdre de vue que la largeur efficace calculée à l'aide de l'équation 5.14 sur la base de ces contraintes est une coupe au droit de l'appui, tandis que la valeur utilisée dans un calcul en barre est une moyenne sur toute sa zone d'application. La largeur efficace effective dépend bien du degré de compensation des déformations, ou plus exactement de l'état de sollicitation global de la structure, y compris l'effort normal dû à la précontrainte. Elle n'est pas utilisable directement pour un calcul en barres. En revanche, la valeur de calcul de cette largeur efficace pour la détermination des flèches ne dépend que de la géométrie et du type de chargement de la structure.

Malgré ces restrictions, les variations de largeur efficace calculée dues aux non linéarités matérielles sont une information intéressante. Il apparaît déjà dans l'exemple de la figure 5.14 que la largeur efficace ne varie pratiquement pas par rapport à sa valeur élastique linéaire pour des valeurs élevées de β. Par contre, pour des valeurs faibles de β, il apparaît que la fissuration (court terme) entraîne une importante augmentation de largeur efficace, tandis que le fluage tend à rétablir partiellement la valeur initiale.

Lors du passage du stade élastique linéaire au stade fissuré à court terme, les zones les plus sollicitées perdent le plus de rigidité, étant donné qu'elles sont les plus fissurées. Cela entraîne une redistribution transversale des contraintes vers les zones moins fissurées et un aplatissement du diagramme correspondant (fig. 5.14 gauche, $\beta = 0$ et 0.3). Lors du calcul à long terme, le fluage tend à réduire l'influence du béton en faveur de celle des armatures, dont le comportement est élastique linéaire à l'état de service. La largeur efficace redescend donc légèrement, un retour à la valeur initiale n'étant possible qu'en supprimant complètement l'influence du béton à long terme.

La figure 5.15 présente un récapitulatif de l'ensemble des calculs. D'une manière générale, la sensibilité des différents paramètres est similaire à ce qui a été constaté pour l'effort tranchant au paragraphe précédent, ce qui s'explique très bien, du fait que le phénomène de largeur efficace est lié à la diffusion des efforts dans le tablier et donc au cisaillement membranaire de ce dernier. On voit que pour $\beta = 0$, la largeur efficace augmente lors de la fissuration et reste pratiquement stable à long terme. Pour $\beta = 0.3$, on également une augmentation lors de la fissuration, puis un retour partiel en arrière à long terme. Pour $\beta \geq 0.8$, les variations ne sont pas significatives.

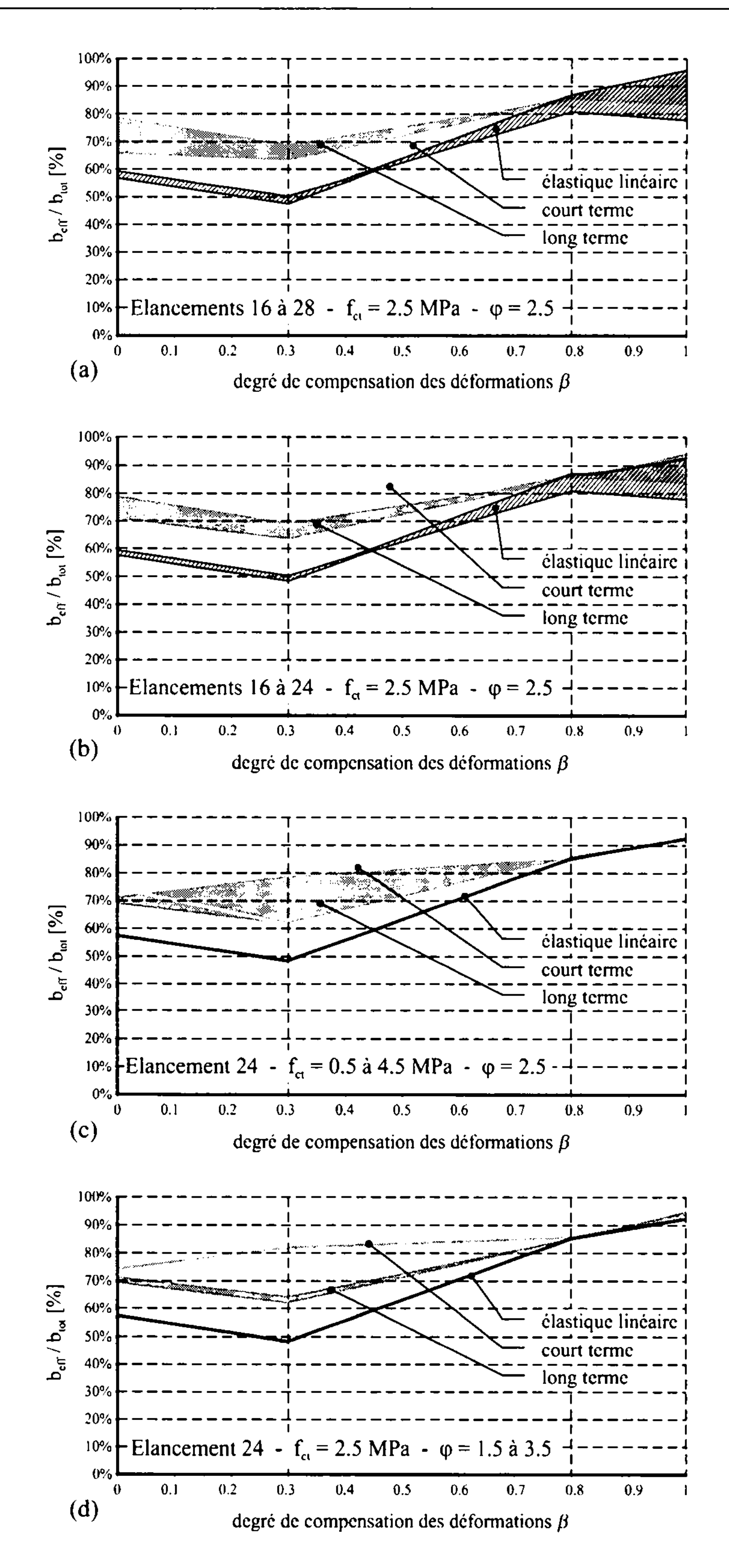


Figure 5.15: Domaines de variation de la largeur efficace en fonction : (a)(b) de l'élancement, (c) de la résistance à la traction, (d) du coefficient de fluage

En 5.15a et b sont représentés les domaines de variation pour différentes valeurs d'élancement. A noter que la valeur $\beta = 0.3$ est parfois sujette à des effets de bord importants, du fait du système statique utilisé. Il peut en effet arriver que la travée de rive soit fissurée

alors que la travée centrale ne l'est pas, ce qui introduit une forte perte d'affinité entre les déformées dues aux charges permanentes et à la précontrainte correspondant aux différentes valeurs de β, ainsi qu'entre les résultats numériques qui en découlent. C'est ici le cas de la poutre d'élancement 28. Le graphique 5.15a présente les résultats incluant cette poutre, et le graphique 5.15b sans elle. On peut y faire les mêmes observations qu'à la figure 5.14. Un résultat qui apparaît clairement ici est que pour $\beta = 1$, les variations de largeur efficace pour un élancement donné sont toujours inférieures à 5%.

Le graphique 5.15c montre l'influence de la résistance à la traction. Les observations faites pour $\beta = 0$ à la figure 5.14 restent valables, tandis qu'une grande dispersion apparaît à nouveau pour $\beta = 0.3$. Comme pour l'effort tranchant, l'influence du coefficient de fluage est pratiquement nulle.

Le cas de $\beta = 0.6$ n'a pas été traité à cause des problèmes numériques qu'il entraîne. Néanmoins, il s'agit d'une valeur charnière pour laquelle la fissuration commence à apparaître dans le tablier localement au droit des âmes, entraînant d'importantes redistributions de contraintes entre les zones fissurées et non fissurées. La largeur efficace est donc susceptible de subir des variations du même ordre de grandeur que pour $\beta < 0.6$.

Synthèse

Si les valeurs de largeur efficace calculées à partir des résultats de calcul en coque ne sont pas directement exploitables pour en tirer des valeurs précises tenant compte de la fissuration pour un calcul en barre, il est néanmoins possible d'en tirer certains enseignements :

- Comme pour les déformations d'effort tranchant, les incertitudes concernant la largeur efficace disparaissent lorsque $\beta \geq 0.8$. L'usage d'une précontrainte importante doit donc permettre de contourner ce problème et autoriser l'utilisation des valeurs de largeur efficace préconisées par les normes pour le calcul des flèches.
- Pour $\beta \leq 0.6$, il est difficile de se prononcer sur la valeur de largeur efficace à adopter pour un calcul de flèche. Les valeurs habituellement utilisées sont vraisemblablement trop défavorables, mais il n'est pas possible de dire précisément dans quelle mesure. Reste toujours la possibilité d'effectuer deux calculs, l'un avec la largeur efficace habituelle préconisée par les normes, et l'autre avec la largeur totale du tablier.

5.1.6 Conclusions

Une des conclusions principales du rapport [27] préparé par l'IBAP a été confirmée par les calculs effectués dans ce sous-chapitre, à savoir que les incertitudes dans le comportement à l'état de service des structures en béton peuvent être, sinon éliminées, du moins fortement

réduites par l'utilisation d'une précontrainte adéquate, soit $\beta \geq 0.8$. Cette conclusion inclut les phénomènes particuliers étudiés ici, soit les déformations dues à l'effort tranchant et la question de la largeur efficace sur appuis. Il s'ensuit une meilleure appréhension du comportement des structures en béton à l'état de service, et donc la possibilité de prévoir et d'améliorer leur comportement à long terme et leur durabilité.

Concernant les phénomènes particuliers mentionnés ci-dessus, il a été montré que, pour $\beta \geq 0.8$, les hypothèses de calcul classique en barre avec prise en compte de l'effort tranchant et de la largeur efficace réduite sur appuis restent tout à fait applicables.

Pour des valeurs de β inférieures ou égales à 0.6, un calcul en barre doit nécessairement passer par une étude de sensibilité des principaux paramètres (coefficient de fluage, résistance à la traction, largeur efficace, part de déformations d'effort tranchant). A noter que le recours à un outil de calcul plus fin, comme le modèle de coque non linéaire utilisé ici, ne permet pas de faire complètement l'économie de cette étude de sensibilité. Néanmoins, les paramètres développés dans ce paragraphe sont automatiquement pris en compte par ce biais.

5.2 Armatures d'effort tranchant

Le dimensionnement à l'effort tranchant d'une poutre en béton armé ou précontraint passe par l'utilisation d'un modèle de calcul à la rupture en treillis, dont les membrures comprimées sont des bielles de compression en béton et les membrures tendues des barres d'armature. L'angle α d'inclinaison des bielles de compression est laissé au choix de l'ingénieur, des limites étant toutefois fixées par les différentes normes de construction. La norme suisse SIA 162 [68] limite ce domaine entre 25° et 65° pour des sections non précontraintes. L'Eurocode 2 [23] donne des valeurs similaires.

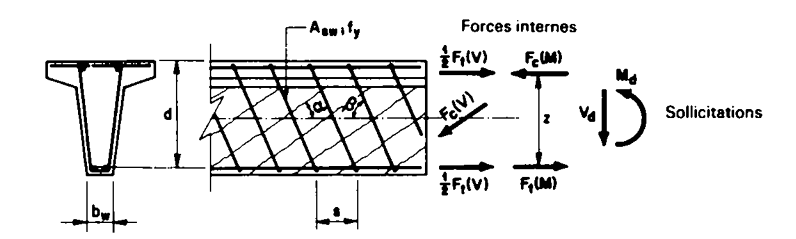


Figure 5.16: Modèle pour le dimensionnement d'une poutre à l'effort tranchant (SIA 162 [68])

Cette liberté laissée à l'ingénieur peut conduire à des répartitions sensiblement différentes des armatures dans une poutre (étriers et armatures longitudinales). Si la sécurité à la rupture est toujours garantie par un dimensionnement adéquat, le comportement à l'état de service peut quant à lui être sensiblement différent d'un cas à l'autre.

5.2.1 Calcul d'une poutre simple

Afin d'évaluer l'influence sur l'état de service d'une structure de tels choix de dimensionnement, la poutre décrite à la figure 5.17 a été dimensionnée pour des angles d'inclinaison des bielles de compression de 25°, 45° et 65°. Le tableau 5.3 donne les armatures dimensionnées pour les 3 variantes. Toutes les armatures sont constantes sur la longueur de la poutre, excepté les étriers dont l'écartement varie selon 3 zones.

La poutre est soumise à son poids propre et à une charge utile répartie de 50 kN/m ou une charge concentrée de 250 kN. Les armatures ont été dimensionnées selon la norme SIA 162, avec un chargement de dimensionnement égal à 1.3 fois le poids propre et 1.5 fois la charge utile. Les quantités n'ont pas été arrondies, afin de ne pas perturber les résultats. Pour la même raison, aucun critère d'armature minimale n'a été utilisé. Les armatures longitudinales constructives, par contre, ont été choisies arbitrairement de cas en cas en fonction des étriers.

Pour les calculs, la poutre a été soumise à plusieurs niveaux de chargement, allant de la charge de fissuration à mi-travée à la charge de dimensionnement.

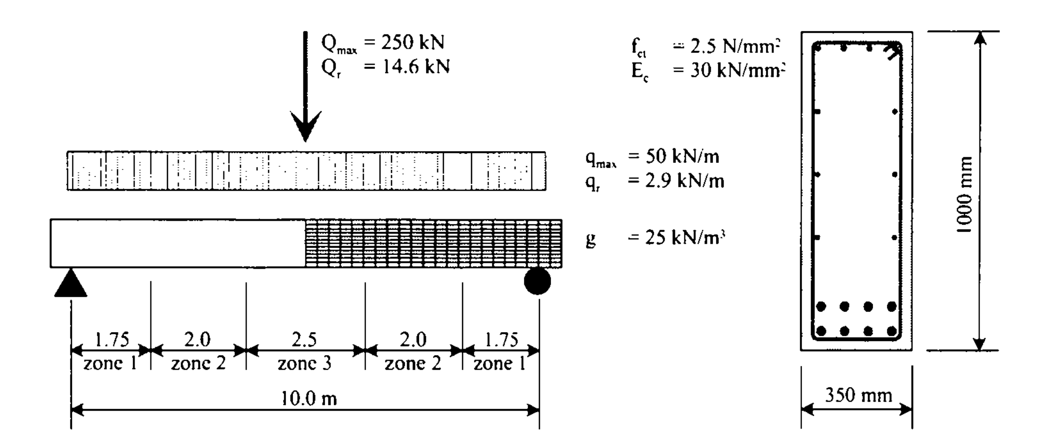


Figure 5.17: Description de la poutre simple. Les zones 1, 2 et 3 indiquent les changements d'écartement des étriers. Seule la moitié droite de la poutre a été modélisée (réseau d'éléments finis représenté)

Dans le tableau 5.3, on constate que les étriers dépendent fortement de l'angle α choisi pour le dimensionnement. Les étriers obtenus pour $\alpha = 65°$ sont environ 4 fois plus importants que pour $\alpha = 25°$. Il faut s'attendre à des différences de comportement significatives.

Tableau 5.3: Armatures de la poutre simple

		A25 α = 25°	**A45** α = 45°	**A65** α = 65°
Armature principale longitudinale		4002 mm² 8 Ø25.2	3722 mm2 8 Ø24.3	3591 mm2 8 Ø23.9
Etriers	Zone 1 (appuis)	901 mm²/m 2 Ø8 s=112	1932 mm²/m 2 Ø12 s=117	4144 mm²/m 2 Ø16 s=97
	Zone 2	601 mm²/m 2 Ø8 s=167	1288 mm²/m 2 Ø12 s=176	2763 mm²/m 2 Ø16 s=146
	Zone 3 (mi-travée)	375 mm²/m 2 Ø8 s=268	805 mm²/m 2 Ø12 s=281	1727 mm²/m 2 Ø16 s=233
Armature constructive longitudinale (série A)		2 Ø8 s=200	2 Ø10 s=200	2 Ø12 s=200

Résultats généraux

Malgré le fait qu'il s'agit d'une poutre plutôt trapue (l/h = 10), les flèches calculées dépendent peu du choix de l'angle α pour le dimensionnement à l'effort tranchant. L'écart entre les résultats obtenus pour les 3 poutres ne dépasse jamais 5%, quel que soit le niveau de chargement considéré (pas de figure).

L'influence sur la fissuration, par contre, n'est pas négligeable. Mais avant de détailler cet aspect, il est nécessaire de faire une parenthèse concernant les contraintes dans les armatures, principal paramètre gouvernant l'ouverture des fissures.

5.2.2 Calcul des contraintes dans les armatures au droit d'une fissure

Comme énoncé dans le chapitre 4, si la LTM 2D se prête bien au calcul global d'une structure et, plus localement, au calcul du comportement **moyen** d'une zone d'un voile en béton armé, les paramètres locaux, tels que les contraintes dans les armatures au droit d'une fissure, sont plus délicats à évaluer. Ceci tient à différents aspects du problème.

La raison principale de cette difficulté vient du fait que la LTM 2D utilise les directions principales des efforts membranaires **moyens** du système béton-armatures durant tout le processus de calcul. En réalité, les fissures se développent selon les directions principales des contraintes **dans le béton** (hypothèse généralement admise). Ces directions ne sont pas nécessairement identiques, mais leur écart reste faible à l'état de service (moins de 5°). Cela peut néanmoins conduire à des différences dans les valeurs des contraintes dans les armatures au droit d'une fissure. En effet, une divergence entre les directions principales des contraintes dans le système béton-armatures et l'orientation de la fissuration implique nécessairement la transmission d'un effort de cisaillement membranaire dans le plan de la fissure. Ce cisaillement peut être repris par le béton (engrènement) et/ou par les armatures.

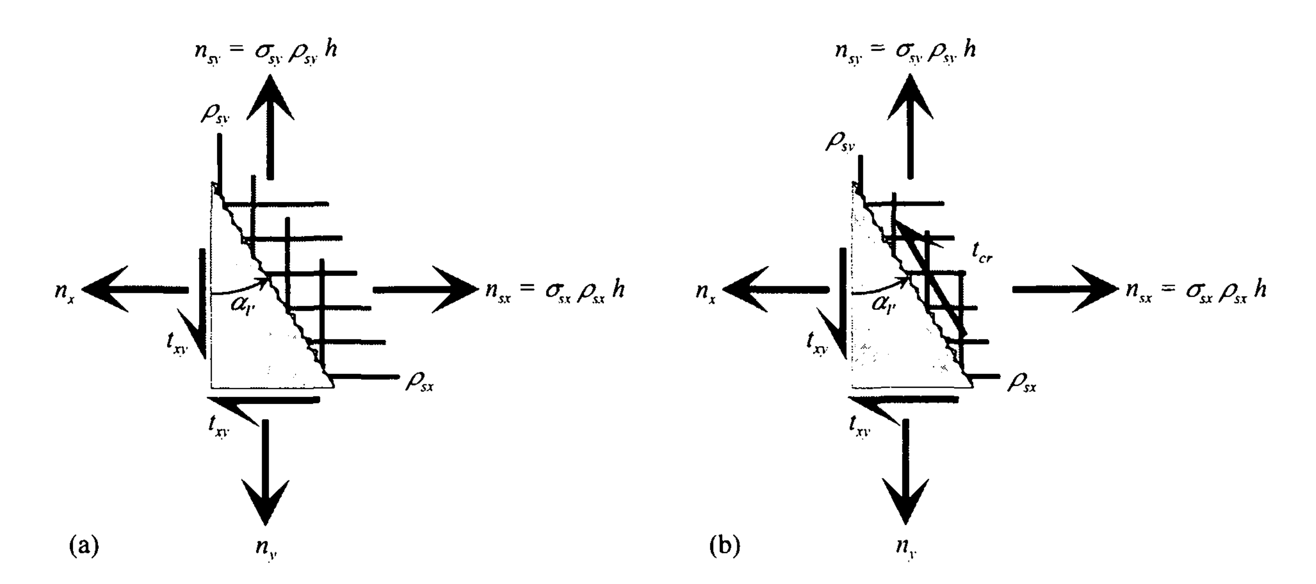


Figure 5.18: Efforts membranaires moyens et efforts transmis au droit d'une fissure (a) sans engrènement (b) avec engrènement (t_{cr} = cisaillement transmis à travers la fissure par l'engrènement du béton)

La démarche proposée ci-après pour calculer les contraintes dans les armatures au droit d'une fissure est une version simplifiée de celle utilisée dans la MCFT (Modified Compression Field Theory [75], § 2.2.1.3.1) pour contrôler la transmission des efforts à travers les fissures. Les armatures sont supposées orthogonales et orientées selon les axes de coordonnées x et y (fig. 5.18 ; une formulation pour des orientations quelconques des armatures est proposée en annexe A.3). Il est admis que, dans un premier temps, les efforts sont transmis intégralement

par les armatures, lesquelles ne transmettent que des contraintes axiales (fig. 5.18a, éq. 5.16 à 5.19). Tant qu'il n'y a pas plastification d'une des nappes, l'équilibre peut être assuré par les armatures seules. Le comportement iso-adoucissant du béton au droit de la fissure n'est pas pris en compte. L'engrènement, par contre, est mobilisé en cas de plastification d'une des nappes pour rétablir l'équilibre dans la direction parallèle à la fissuration. L'équilibre dans la direction perpendiculaire à la fissuration est assuré par redistribution des contraintes sur les armatures non plastifiées (fig. 5.18b, éq. 5.20 à 5.23).

En écrivant l'équilibre des contraintes de la figure 5.18a, on obtient :

$$\sigma_{sx'} = \frac{n_x + t_{xy} \cdot \tan\alpha_{I'}}{\rho_{sx} \cdot h} \tag{5.16}$$

$$\sigma_{sy'} = \frac{n_y + t_{xy} / \tan\alpha_{I'}}{\rho_{sy} \cdot h} \tag{5.17}$$

En l'absence de plastification des armatures, les contraintes s'écrivent directement :

Si $\sigma_{sx'} \leq f_{yx}$ et $\sigma_{sy'} \leq f_{yy}$:

$$\sigma_{sx} = \sigma_{sx'} \tag{5.18}$$

$$\sigma_{sy} = \sigma_{sy'} \tag{5.19}$$

Par contre, si une des nappes se plastifie :

Si $\sigma_{sx'} > f_{yx}$

$$\sigma_{sx} = f_{yx} \tag{5.20}$$

$$\sigma_{sy} = \sigma_{sy'} + \left(\sigma_{sx'} - f_{yx}\right) \cdot \frac{\rho_{sx}}{\rho_{sy}} \cdot \frac{1}{\tan^2 \alpha_{I'}} \tag{5.21}$$

Si $\sigma_{sy'} > f_{yy}$

$$\sigma_{sx} = \sigma_{sx'} + \left(\sigma_{sy'} - f_{yy}\right) \cdot \frac{\rho_{sy}}{\rho_{sx}} \cdot \tan^2 \alpha_{I'} \tag{5.22}$$

$$\sigma_{sy} = f_{yy} \tag{5.23}$$

Avec	n_x, n_y, t_{xy}	efforts membranaires moyens dans la zone considérée
	n_I	effort de traction moyen dans la direction principale I
	$\alpha_{I'}$	orientation de la normale à la fissure
	ρ_{sx}, ρ_{sy}	taux d'armature dans la direction x resp. y
	h	épaisseur de la membrane
	f_{yx}, f_{yy}	limite d'élasticité des aciers d'armature

$\sigma_{sx'}$, $\sigma_{sy'}$ contraintes de calcul dans les armatures (hyp. non plastifié)

σ_{sx}, σ_{sy} contraintes dans les armatures

Si les redistributions (éq. 5.21 ou 5.22) engendrent la plastification de la deuxième nappe d'armature, toutes les réserves sont épuisées et la rupture est atteinte.

La première simplification par rapport à la MCFT est qu'il n'y a pas de contrôle de la résistance de l'engrènement au droit de la fissure. La capacité du béton est supposée suffisante pour assurer l'équilibre. Dans la mesure où le domaine de travail considéré est l'état de service, cette simplification est raisonnable. La prise en compte de la plastification des armatures est par contre nécessaire pour traiter les zones sous-armées (voir résultats ci-après).

Il reste à déterminer la direction de la fissure pour le calcul. La direction de la traction principale moyenne est donnée par

$$\tan\alpha_I = \frac{n_I - n_x}{t_{xy}} \qquad (5.24)$$

avec $$n_I = \frac{n_x + n_y}{2} + \sqrt{\frac{(n_x - n_y)^2}{4} + t_{xy}^2} \qquad (5.25)$$

La direction $\alpha_{I'}$ de la normale à la fissure peut être définie comme suit

$$\alpha_{I'} = \alpha_I + \delta\alpha_I \qquad (5.26)$$

$\delta\alpha_I$ étant la déviation de l'angle de la fissure par rapport à la normale à la traction principale moyenne. La seconde simplification par rapport à la MCFT est que, en 1ère approximation, on peut admettre $\delta\alpha_I = 0$. Cette hypothèse simplifie considérablement les équations et ramène à un état d'équilibre hydrostatique des forces, ce qui donne

$$\sigma_{sx'} \cdot \rho_{sx} = \sigma_{sy'} \cdot \rho_{sy} = n_I / h \qquad (5.27)$$

quelle que soit l'orientation des armatures. Les contraintes dans ces dernières ne dépendent dès lors plus que des différents taux d'armatures en présence. Il faut cependant noter que cette dernière simplification peut conduire à des résultats particulièrement fantaisistes pour des armatures non orthogonales.

Cette méthode simplifiée a été appliquée à un des éléments de voile calculés par Vecchio et Collins [75] et ses résultats comparés à ceux fournis par les auteurs (fig. 5.19 et 5.20).

Si on s'en tient au cas le plus fréquent de deux nappes d'armatures disposées orthogonalement, la déviation de la direction de la fissuration par rapport aux directions principales moyennes peut aller jusqu'à 5° à l'état de service, et jusqu'à environ 10° à la rupture. Si l'erreur sur les contraintes dans les armatures à l'état de service reste en dessous de 15%, elle peut s'écarter bien davantage à la rupture en raison de la plastification (fig. 5.19 et 5.20).

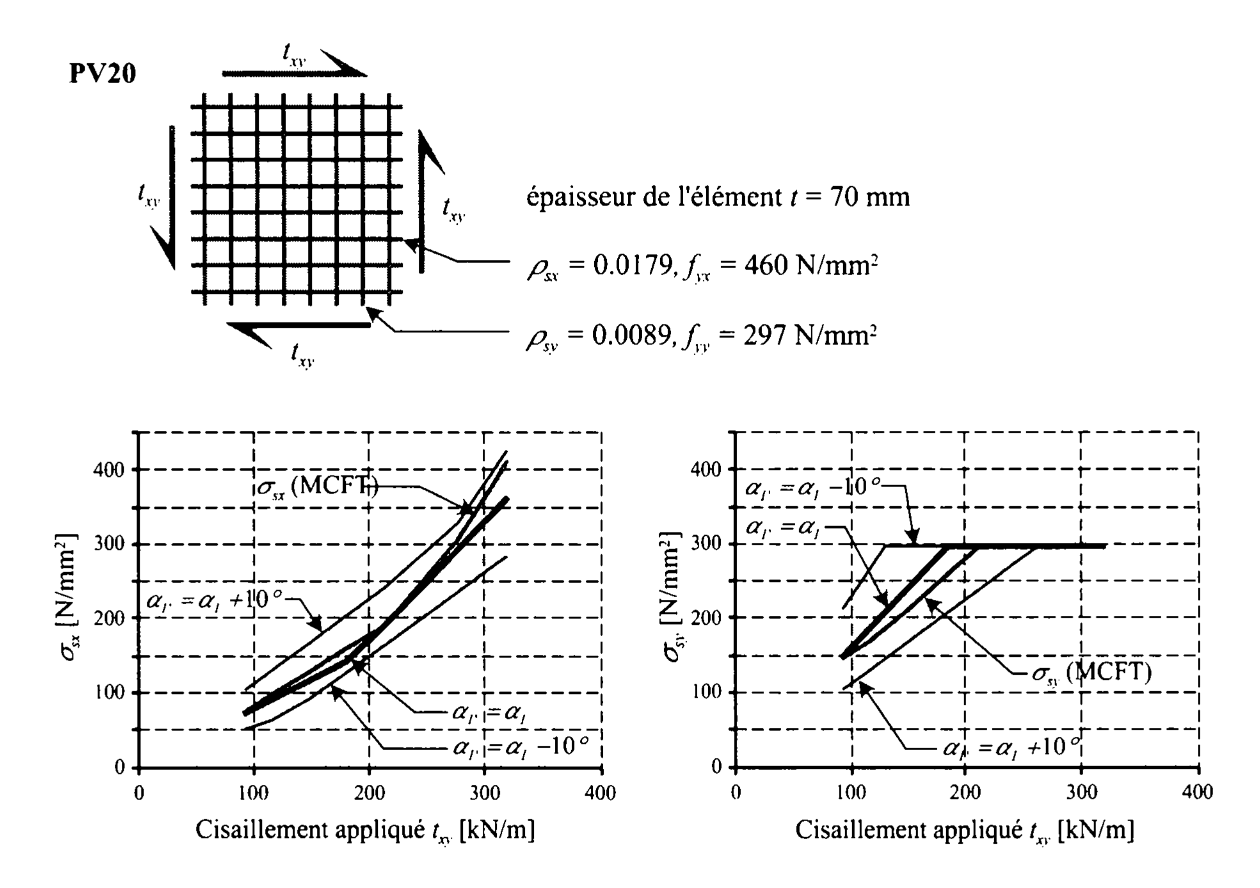


Figure 5.19: Contraintes dans les armatures calculées selon différentes méthodes pour le spécimen PV20 de Vecchio et Collins [75]. Méthode simplifiée sans déviation de l'orientation des fissures, méthode simplifiée avec déviation de ±10°, et calcul selon la MCFT.

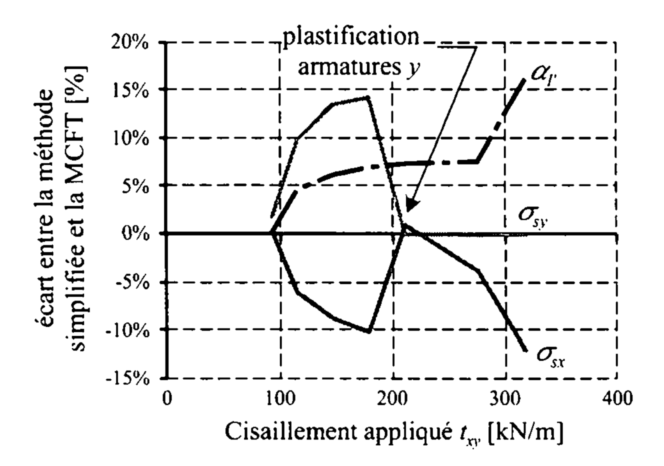


Figure 5.20: Ecart entre la méthode simplifiée et la MCFT

Une plus grande précision dans le calcul des contraintes dans les armatures n'est malheureusement pas accessible par des méthodes aussi directes que celle qui est proposée ci-dessus. Il est pour cela nécessaire de passer par un modèle de calcul plus complet, tel que la MCFT. Ce type d'approche passe par un processus itératif qui permet de déterminer de façon plus précise l'orientation des fissures et donc une valeur plus précise du paramètre $\delta\alpha_l$ qui fait défaut dans la méthode simplifiée. Afin d'estimer la précision des résultats obtenus, on peut

effectuer deux calculs en utilisant $\delta\alpha_l = \pm 5°$ (domaine de variation constaté à l'état de service). De cette façon, même si l'orientation réelle de la fissuration n'est pas connue précisément, son influence sur les contraintes dans les armatures peut être évaluée.

Etant donné sa grande simplicité d'application et l'erreur relativement faible qui en découle, le modèle simplifié est néanmoins utilisé dans les calculs qui suivent.

5.2.3 Contraintes dans les armatures de « l'âme » de la poutre

Le modèle décrit au paragraphe précédent permet d'évaluer les contraintes dans les armatures d'une structure. L'application au cas de la poutre simple du paragraphe 5.2.1 est immédiate. Le but étant ici d'observer l'influence du choix de l'angle d'inclinaison des bielles pour le dimensionnement à l'effort tranchant sur le comportement en service d'une structure, les résultats présentés portent sur la fissuration due à l'effort tranchant, et donc sur les contraintes dans les étriers et les armatures constructives longitudinales.

Il a déjà été mentionné au paragraphe 5.2.1 que la flèche varie très peu en fonction de l'angle d'inclinaison des bielles choisi pour le dimensionnement à l'effort tranchant. Il en va de même pour les contraintes dans les armatures principales (armatures longitudinales de flexion et d'effort tranchant) dont les variations n'excèdent pas 5% d'une poutre à l'autre.

Plastification à l'état de service ?

La figure 5.21 présente l'état de fissuration des trois poutres à différents niveaux de chargement. Si les armatures principales ne dépassent jamais le stade de fissuration stabilisée – ce qui est normal à l'état de service, on voit apparaître, dès le début de la fissuration, des signes de plastification des armatures constructives longitudinales pour les deux poutres A25 et A45. La fissuration se propage, toujours avec une indication de plastification des armatures de l'âme, systématique pour la poutre A25 et quasi systématique pour la poutre A45. La poutre A65, dont les armatures d'âme sont plus importantes, échappe à ce phénomène.

Il faut ici relativiser les résultats obtenus et clarifier certains points inhérents à la LTM 2D. Tout d'abord, le signal de plastification des armatures constructives situées juste au-dessus des armatures principales dès l'apparition de la fissuration est clairement une fausse alerte. La LT/LTM est formulée de telle façon que, pour un tirant sous-armé, dès l'apparition de la fissuration on se retrouve sur le plateau de plastification, ce qui ne signifie pas nécessairement la plastification des armatures. On touche ici une limitation de la loi du tirant classique, qui ne permet pas de traiter de façon détaillée un tirant sous-armé.

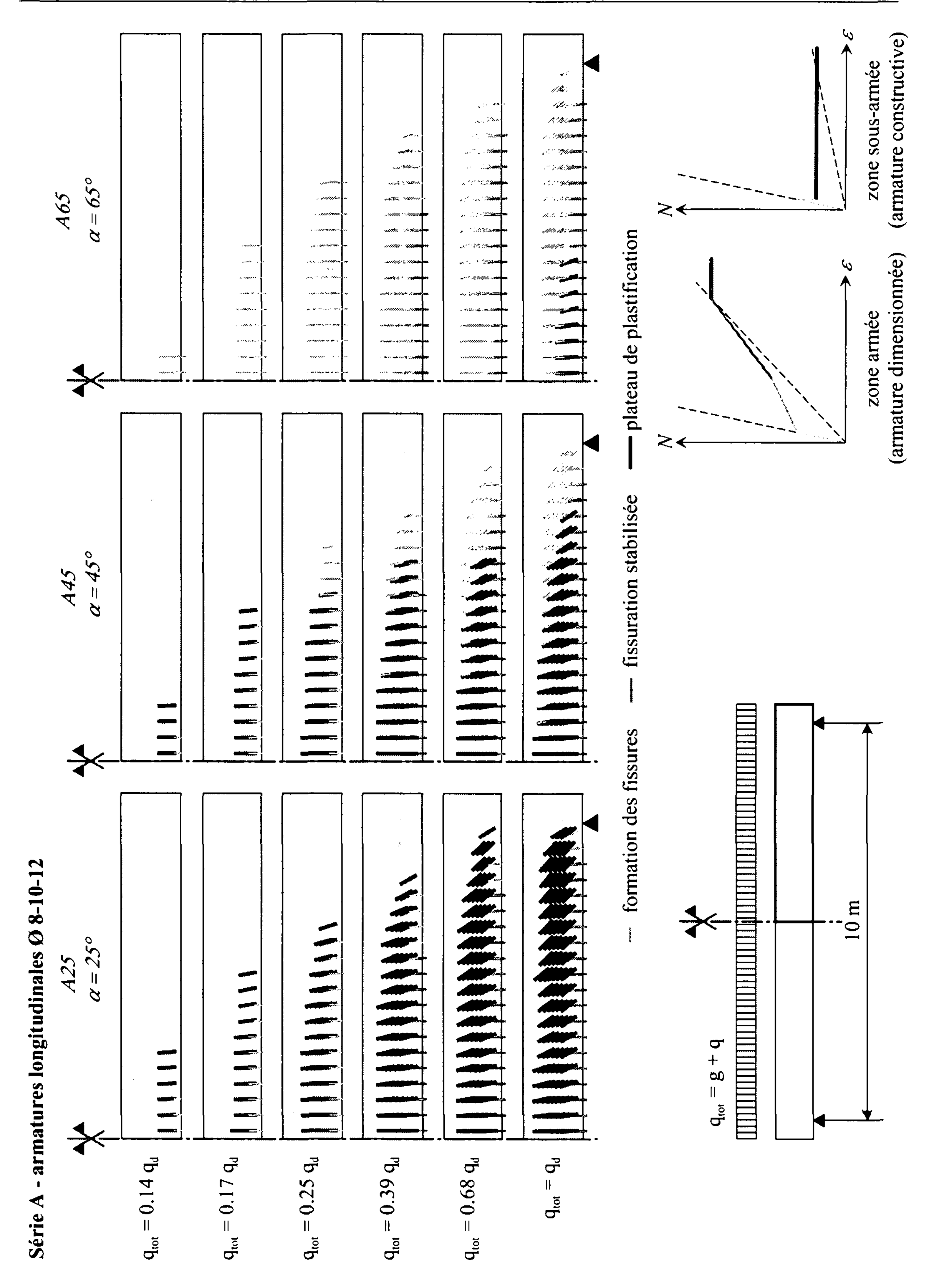


Figure 5.21: Etat de fissuration en fonction de l'angle α de dimensionnement des armatures d'effort tranchant et du niveau de chargement
Série A, armatures constructives longitudinales Ø 8, 10 et 12, court terme

On se trouve ici en présence d'un important effet de taille. La LT/LTM est en fait une loi enveloppe des situations possibles. La figure 5.22 montre les différences de comportement entre deux tirants ayant exactement la même section et la même armature, laquelle est insuffisante pour transmettre l'effort de fissuration. Seule la longueur du tirant change, l'un étant « très » long et l'autre « très » court.

Dès la formation de la première fissure, les déformations se redistribuent le long du tirant, la dilatation locale au droit de la fissure étant plus importante que sur le reste du tirant. Avec toujours une dilatation moyenne identique, dans le cas du tirant long, l'augmentation de dilatation au droit de la fissure est masquée par l'allongement du béton sur la longueur du tirant, alors que pour le tirant court, pratiquement toute la déformation est concentrée au droit de la fissure. Ainsi, le tirant court fissuré tend à se comporter plutôt en stade II-nu. Dans le cas du tirant long, un très faible allongement moyen supplémentaire correspond à une forte augmentation de l'allongement au droit de la fissure, amenant très rapidement à la plastification de l'armature. La LT présenté dans le diagramme correspond à un tirant infiniment long.

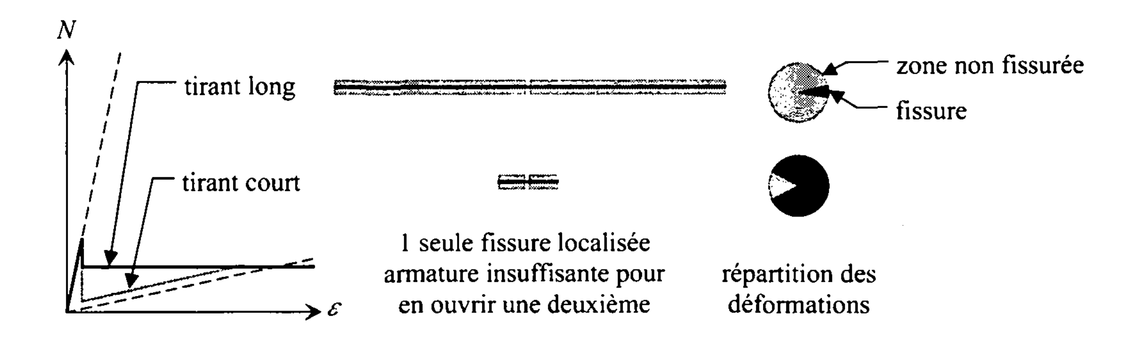


Figure 5.22: Effet de taille dans la LT/LTM pour un tirant sous-armé. Le comportement iso-adoucissant du béton n'est pas représenté.

Dans le cas présent, les armatures constructives situées juste au-dessus des armatures principales se trouvent dans une zone ou l'ouverture et la répartition des fissures est contrôlée par ces même armatures principales. Il n'est donc pas possible que la dilatation se concentre au droit d'une seul fissure, plastifiant du même coup les armatures constructives. On se trouve donc plutôt dans le cas d'un tirant sous-armé court, cas particulièrement délicat pour la LT/LTM. Ces résultats doivent donc être interprétés prudemment.

Un autre point délicat dans ces résultats tient au principe de modélisation des armatures dans la LTM 2D. Le fait d'utiliser une section d'acier équivalente dans les directions des efforts principaux implique qu'il n'est pas possible de plastifier séparément l'une ou l'autre nappe d'armature (cf. plus haut). En fait, la plastification de l'aire d'acier équivalente signalée par le calcul peut aussi se manifester si une seule des deux nappes est plastifiée. Un calcul local des contraintes dans les armatures en utilisant la méthode décrite au paragraphe 5.2.2 permet d'en savoir plus sur ce dernier point.

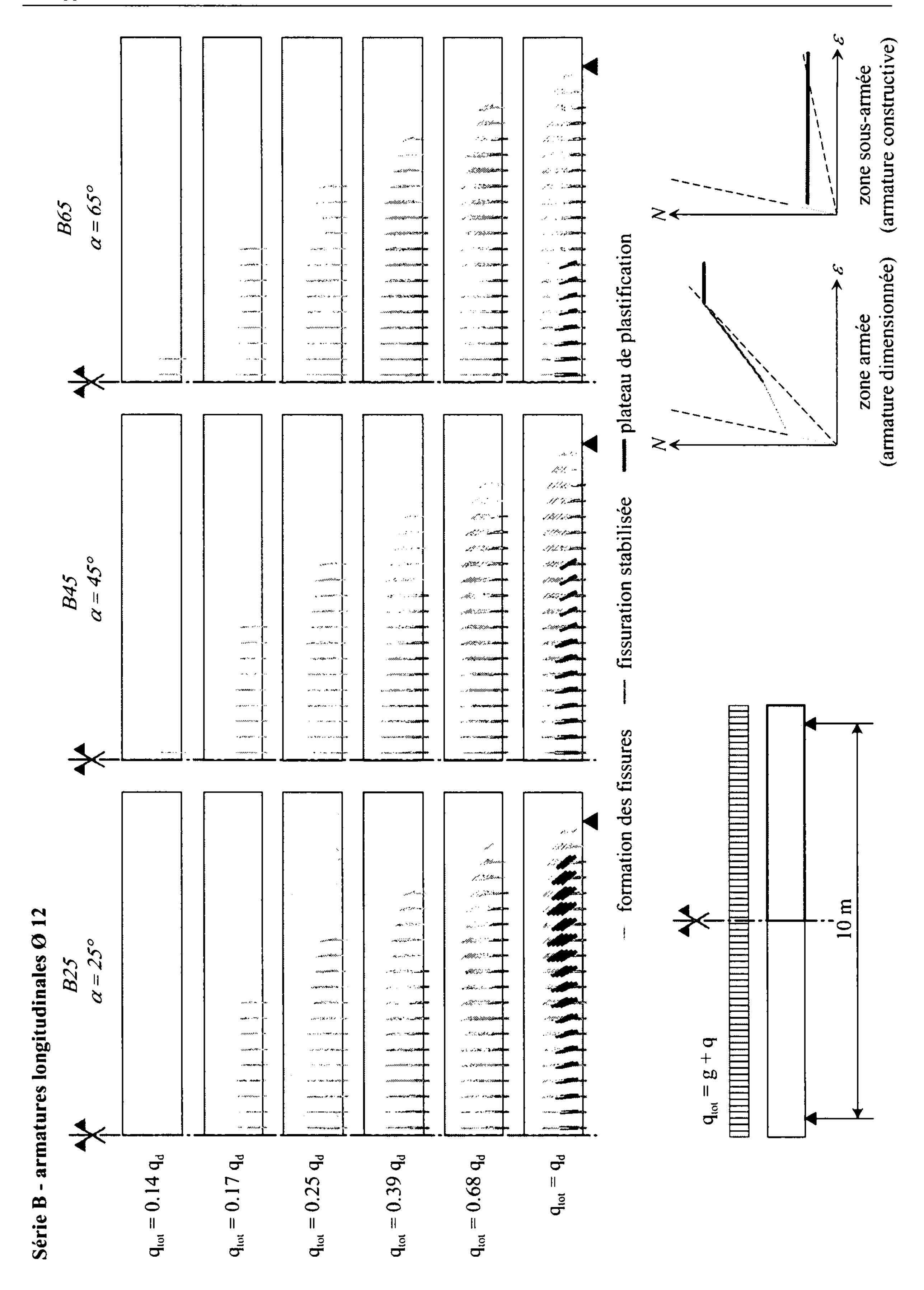


Figure 5.23: Etat de fissuration en fonction de l'angle α de dimensionnement des armatures d'effort tranchant et du niveau de chargement
Série B, armatures constructives longitudinales Ø 12, court terme

Les résultats obtenus à la figure 5.21 ont conduit à calculer une deuxième série de poutres avec des armatures constructives renforcées. Les armatures constructives utilisées sont les mêmes pour les 3 poutres B25, B45 et B65, identiques à celles de la poutre A65 (en fait, A65 et B65 sont en tout point identiques). Compte tenu des dimensions de la section et de l'espacement des barres, ces armatures sont suffisantes pour répartir la fissuration.

La figure 5.23 montre l'état de fissuration des ces 3 nouvelles poutres. On constate d'emblée que les premiers signes de plastification n'apparaissent que lorsque la charge de dimensionnement est atteinte, et ce principalement pour la poutre B25, dans la zone où l'effort tranchant est prépondérant.

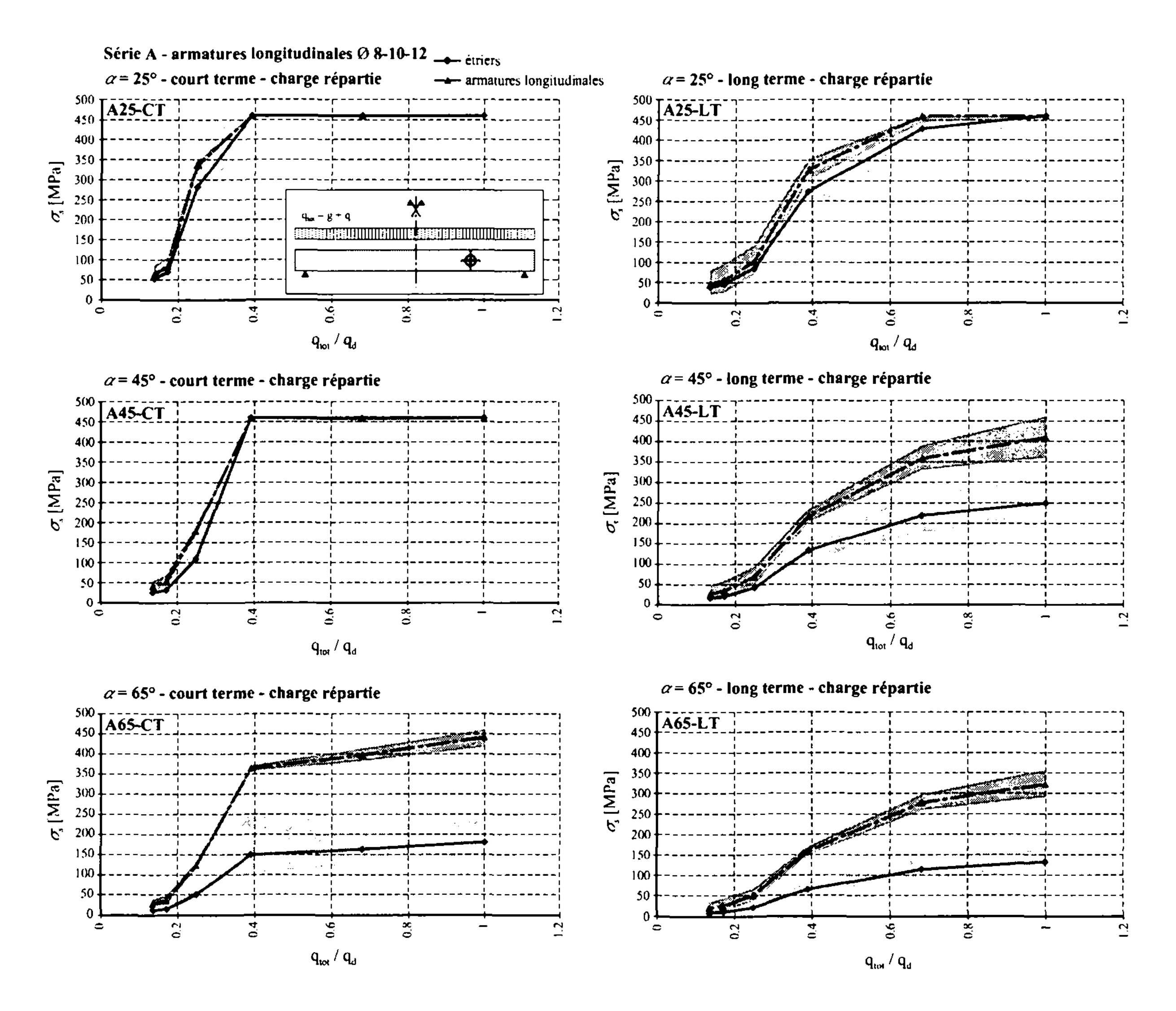


Figure 5.24: Contraintes dans les armatures à mi-hauteur de la poutre au quart de la portée. Série A: armatures constructives longitudinales Ø 8, 10 et 12

Afin de regarder de plus près les contraintes dans les armatures de l'âme dans une zone sollicitée essentiellement à l'effort tranchant, les figures 5.24 et 5.25 montrent les contraintes dans les armatures en un point situé au quart de la portée et à mi-hauteur de la section de la poutre. Elles ont été calculées à l'aide de la méthode décrite au paragraphe 5.2.2. Chaque

diagramme montre les contraintes dans les étriers et les armatures constructives longitudinales en fonction du niveau de chargement. Les zones tramées sont une indication de la précision de calculs, soit les valeurs des mêmes contraintes calculées avec $\delta\alpha_{l'} = \pm 5°$. Les graphiques de gauche sont les résultats à court terme et ceux de droite les résultats à long terme. Malgré le fait que les résultats sont présentés en fonction du niveau de chargement, *il ne s'agit pas de diagrammes de montée en charge.* Chaque calcul est effectué selon l'hypothèse qu'il n'y a que des charges permanentes de longue durée.

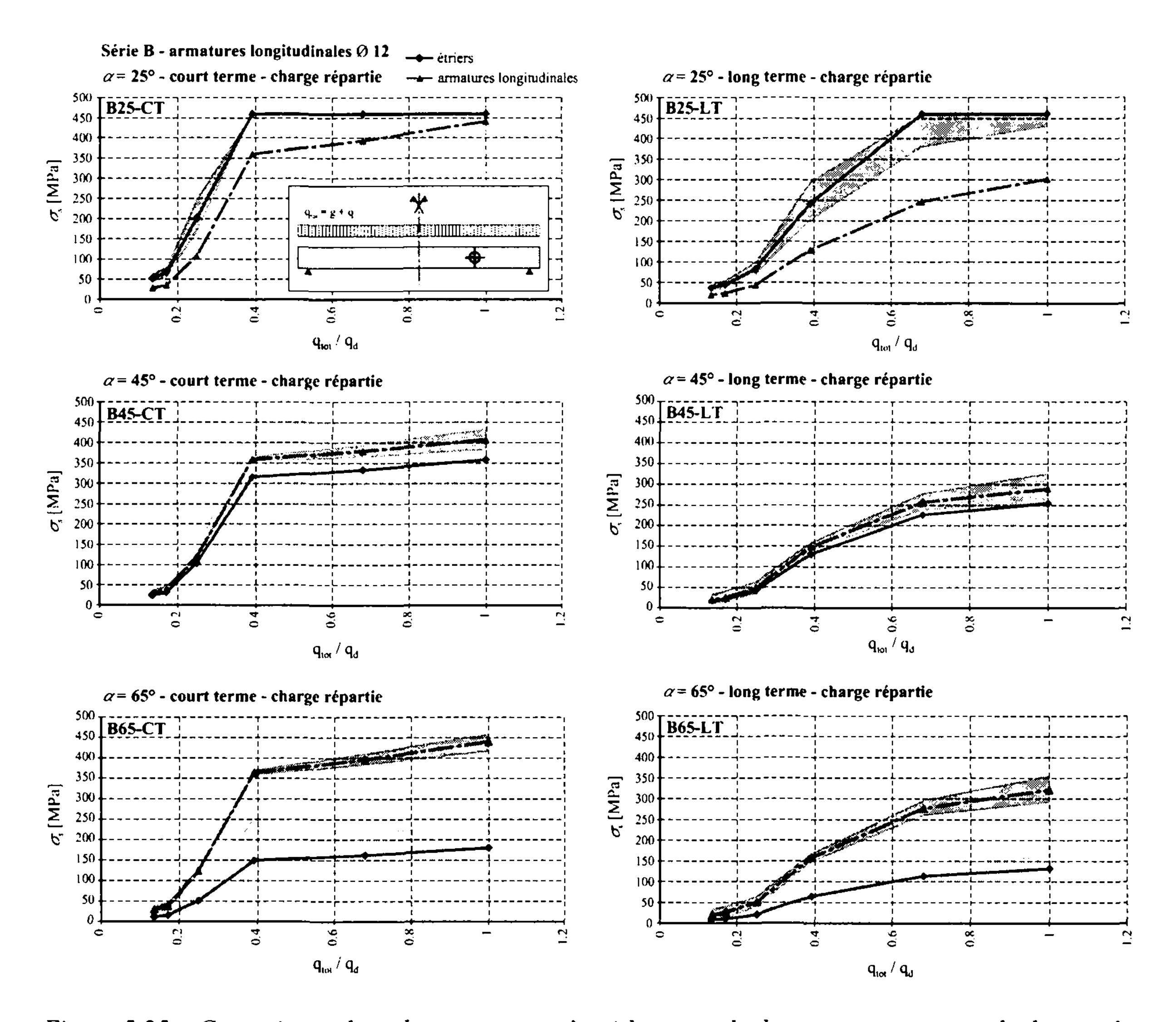


Figure 5.25: Contraintes dans les armatures à mi-hauteur de la poutre au quart de la portée. Série B: armatures constructives longitudinales Ø 12

En ce qui concerne les contraintes calculées à court terme, les résultats obtenus ici confirment les observations faites sur les vues d'ensemble des figures 5.21 et 5.23. pour les deux poutres A25 et A45. Les contraintes montent très rapidement dans les étriers et les armatures constructives, qui sont tous deux plastifiés déjà à 40% de la charge de dimensionnement, donc un niveau de chargement *de service*. Ces problèmes de plastification à bas niveau de charge disparaissent pour les poutres A65, B45 et B65. Des armatures constructives ainsi que des

étriers plus conséquents reprennent sans problème les efforts à transmettre. Dans le cas de la poutre B25, on voit que ce sont cette fois les étriers qui se plastifient, toujours à 40 % de la charge de dimensionnement, alors que les armatures constructives restent en phase élastique. C'est une situation particulière où les armatures constructives (1131 mm2/m, 2 Ø12 s=200) sont nettement plus fortes que les étriers (601 mm2/m, 2 Ø8 s=167).

Considérant toujours le même point de référence au quart de la portée, avant fissuration, c'est à dire à moins de 20% de la charge de dimensionnement, l'orientation des contraintes principales avoisine les 40° à court terme. Puis, lors de la fissuration, les bielles de compression se forment selon un angle beaucoup plus raide, entre 70° et 80°, pour à nouveau s'aplatir légèrement avec l'augmentation de la charge jusqu'à des valeurs entre 50° et 65°.A noter que l'inclinaison des bielles montre une tendance générale à varier dans le même sens que l'angle α choisi pour le dimensionnement des étriers. Cette tendance est nettement marquée dans la série A, et plus légère dans la série B. A long terme, l'inclinaison des bielles montre les mêmes tendance de variations, mais les valeurs sont de 10° à 15° plus faibles.

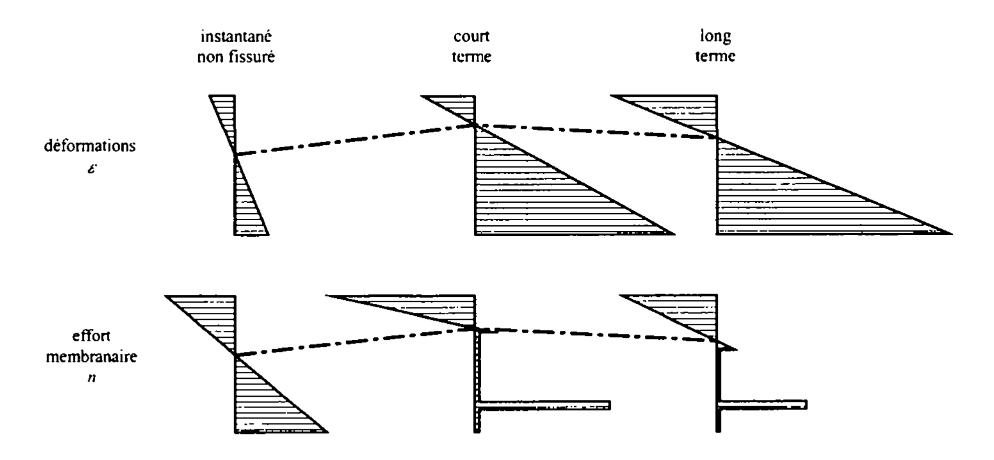


Figure 5.26: Déplacement de l'axe neutre dû à la fissuration et au fluage

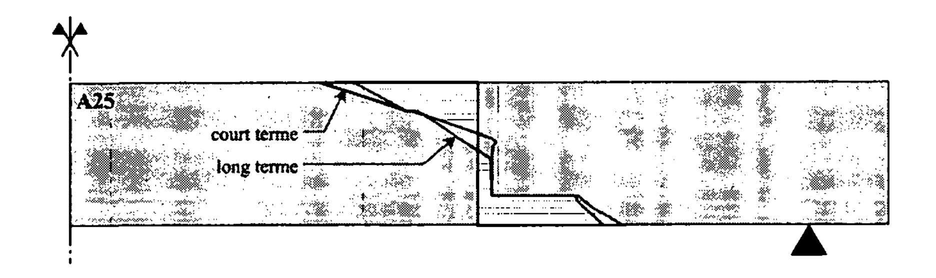


Figure 5.27: Effort membranaire longitudinal moyen à court terme et à long terme dans la poutre A25, section au quart de la travée

Les contraintes calculées à long terme sont d'une manière générale plus faibles qu'à court terme. A priori, le fluage redistribue les sollicitations vers les armatures, augmentant du même coup les contraintes dans ces dernières, mais ce serait compter sans les redistributions d'efforts à l'intérieur de la structure. Dans le cas particulier, c'est le phénomène bien connu

du déplacement de l'axe neutre dû au fluage qui soulage la zone du point de mesure choisi (fig. 5.26 et 5.27).

Malgré cet effet favorable du fluage, la poutre A25 indique toujours une plastification des armatures longitudinales pour 70% de la charge de dimensionnement, ce qui est encore assez loin de la charge de rupture de la poutre.

Cependant, si le comportement à long terme semble satisfaisant, les signes de plastification constatés à court terme sont relativement alarmants. Il est inadmissible que des armatures soient plastifiées à l'état de service, et a fortiori pour des niveaux de chargement aussi bas.

Interprétation

Il est surprenant d'obtenir à l'état de service de la plastification dans des armatures dimensionnées pour reprendre des charges trois fois plus élevées. Il ne faut cependant pas perdre de vue que le dimensionnement a été effectué à l'aide d'un modèle de comportement *plastique à la rupture*. Ce type de modèle sous-entend un mode de fonctionnement bien particulier de la structure, qui n'est pas forcément celui de l'état de service. La théorie de la plasticité a bien des attraits, mais chaque ingénieur sait qu'il ne faut pas la pousser trop loin, sous peine d'obtenir un comportement insatisfaisant à l'état de service, ce qui est clairement le cas ici.

Le modèle de dimensionnement des armatures d'effort tranchant dans une poutre est basé sur une inclinaison des bielles de compression fixée par l'ingénieur. Si elle semble tendre vers cette valeur pour les niveaux de chargement les plus élevés, elle n'est pas du tout la même à l'état de service, comme l'ont montré les calculs, y compris en stade fissuré. Si l'on s'en tient au modèle de treillis, des bielles de compression moins inclinées impliquent, par équilibre, des tractions plus importantes dans les étriers. Il est donc logique que dans la première série seule la poutre A65, dont l'angle de dimensionnement α est proche de l'inclinaison des bielles à l'état de service, présente un comportement réellement satisfaisant du point de vue des contraintes dans les armatures.

Dans le cas des armatures constructives disposées juste au-dessus des armatures principales (fig. 5.21, poutre A25, chargement minimal), le signal de plastification est assez clairement abusif, quoique facilement interprétable. Dans cette zone, le contrôle de la fissuration est en effet assuré par les armatures principales. Cela montre néanmoins que le modèle de membrane fissurée qu'est la LTM 2D réagit localement assez mal à la proximité d'armatures concentrées et de zones sous-armées, même si le comportement global est satisfaisant. Une rapide vérification permet en effet de vérifier que les contraintes maximales obtenues ici pour les armatures principales à mi-travée sont effectivement les mêmes valeurs que celles issues d'un simple calcul de section en stade II-nu. Soit dit en passant, la configuration en question –

la partie inférieure d'une poutre – n'est pas vraiment assimilable à une membrane en béton armé.

Par contre, la zone située au quart de la portée à mi-hauteur de la poutre peut être considérée comme un élément de membrane avec des armatures réparties. De plus, aucune armature concentrée proche ne peut assurer les contrôle de la fissuration. Il n'y a donc pas lieu de mettre en doute l'applicabilité de la LTM 2D en ce point particulier.

5.2.4 Conclusions

Cet exemple de calcul a sans doute poussé la LTM 2D dans ses derniers retranchements. L'application à une poutre, même peu élancée, d'un modèle de calcul de membrane en béton armé est, sans doute, un exercice quelque peu académique. Les résultats obtenus permettent cependant de se prononcer sur la relative liberté de l'ingénieur quant à l'application de la théorie de la plasticité dans le dimensionnement du béton armé, et plus particulièrement des armatures d'efforts tranchant.

Les calculs effectués ici montrent que l'utilisation de valeurs faibles pour l'angle α d'inclinaison des bielles de compression pour le dimensionnement à l'effort tranchant peut conduire à des armatures insuffisantes pour assurer un bon comportement à l'état de service, malgré une sécurité structurale satisfaisante. Un bon contrôle de la fissuration semble passer par un choix de l'angle α supérieur ou égal à 45°, accompagné d'une armature constructive adéquate.

5.3 Poutre cloison

Comme pour le dimensionnement à l'effort tranchant d'une poutre, le dimensionnement d'un voile passe généralement par un modèle en treillis. Il est cependant possible dans certains cas d'utiliser un modèle de calcul en poutre, moyennant certaines corrections (fig. 5.28).

5.3.1 Description du problème

Dans le cas du voile traité dans ce paragraphe (fig. 5.29), le système statique peut être assimilé à une poutre simple. Le moment de flexion à mi-travée ne dépend en aucune façon de l'élancement. Toutefois, la répartition des contraintes est très différente de celle – linéaire – résultant d'un calcul en poutre (fig. 5.28). L'hypothèse de conservation des sections planes de Bernoulli-Navier n'est ici plus du tout applicable. Pour le dimensionnement, le remplacement de ce moment de flexion par un couple de forces est suffisant (fig. 5.28). C'est ici que la théorie de la plasticité laisse une grande marge de manœuvre à l'ingénieur. En poussant à l'extrême, le bras de levier de ce couple peut dépasser 90% de la hauteur du voile. Une telle hypothèse implique de fortes redistributions de contraintes dans le voile et peut conduire à un comportement insatisfaisant à l'état de service, même si la sécurité structurale est toujours garantie.

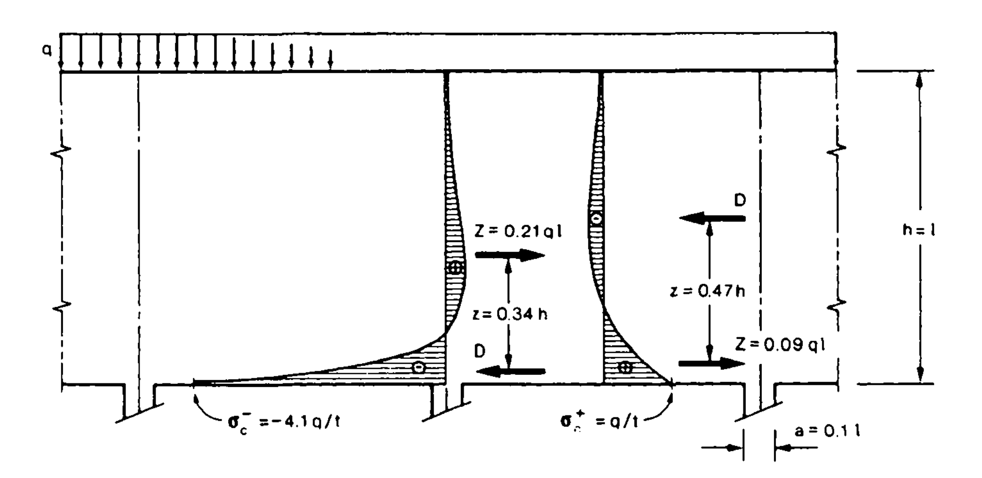


Figure 5.28: Etat de contraintes élastique et forces de remplacement pour le dimensionnement dans une poutre cloison [29]

Dans le cas particulier de la figure 5.29, les armatures ont été dimensionnées pour deux configurations différentes : avec un bras de levier correspondant à la distribution élastique des contraintes, soit 62% de la hauteur du voile, et avec un bras de levier « plastique » choisi égal à 80% de la hauteur du voile. Cette valeur n'est pas extrême : une solution purement plastique permet, dans le cas particulier, d'aller jusqu'à un bras de levier de 95%. L'armature principale

a été répartie sur une certaine hauteur $h_{rép}$ différente de cas en cas. Les armatures de répartition ont été choisies arbitrairement, en relation avec les armatures principales dimensionnées. Les armatures mises en place pour les différents calculs sont décrites au tableau 5.4.

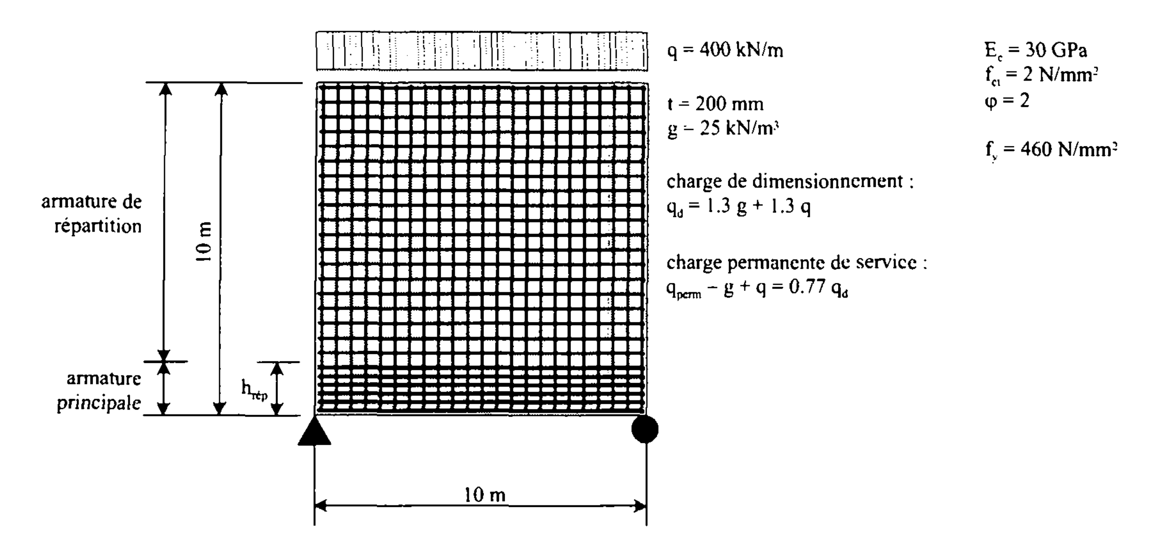


Figure 5.29: Voile carré en béton armé sur deux appuis

Tableau 5.4: Armatures des éléments de voile carré calculés

Calcul	Hypothèse de dimensionnement	Armature principale			Armature de répartition	
		Barres	Aire d'acier	Hauteur de répartition	Barres	Aire d'acier
EL1	élastique z = 0.62 h	2x Ø14s100	3078 mm² *1.54%*	$h_{rép}$ = 1 m	2x Ø12s200	1131 mm²/m *0.57%*
PL1	plastique z = 0.8 h	2x Ø12s100	2262 mm² *1.13%*	$h_{rép}$ = 1 m	2x Ø8s200	503 mm²/m *0.25%*
EL2	élastique z = 0.62 h	2x Ø17s150	3036 mm² *1.52%*	$h_{rép}$ = 1 m	2x Ø12s200	1131 mm²/m *0.57%*
PL2	plastique z = 0.8 h	2x Ø15s150	2366 mm² *1.18%*	$h_{rép}$ = 1 m	2x Ø8s200	503 mm²/m *0.25%*
EL4	élastique z = 0.62 h	2x Ø14s150	3078 mm² *1.03%*	$h_{rép}$ = 1.5 m	2x Ø12s200	1131 mm²/m *0.57%*
PL4	plastique z = 0.8 h	2x Ø12s150	2262 mm² *0.75%*	$h_{rép}$ = 1.5 m	2x Ø8s200	503 mm²/m *0.25%*
PL5	plastique z = 0.8 h	2x Ø12s150	2262 mm² *0.75%*	$h_{rép}$ = 1.5 m	2x Ø10s200	785 mm²/m *0.39%*
PL6	plastique z = 0.8 h	2x Ø12s150	2262 mm² *0.75%*	$h_{rép}$ = 1.5 m	2x Ø12s200	1131 mm²/m *0.57%*
EL7	élastique z = 0.62 h	2x Ø12s200	3393 mm² *0.57%*	$h_{rép}$ = 3 m	2x Ø12s200	1131 mm²/m *0.57%*
PL7	plastique z = 0.8 h	2x Ø10s200	2356 mm² *0.39%*	$h_{rép}$ = 3 m	2x Ø8s200	503 mm²/m *0.25%*

Le dimensionnement a été réalisé pour les seules charges permanentes, majorées d'un facteur 1.3. Le niveau de chargement permanent pour les calculs est donc de 77% de la charge de dimensionnement, ce qui est relativement élevé, mais pas démesuré.

Une telle structure est extrêmement rigide et ne réserve donc pas de grande surprise au niveau des déformations. Comme pour l'exemple numérique précédent, celui-ci va plutôt porter sur la fissuration et les contraintes dans les armatures. Nous allons nous intéresser à une coupe verticale à mi-travée. Les directions des armatures coïncidant avec celles des contraintes principales et de la fissuration, le calcul des contraintes est immédiat et ne nécessite pas le recours à la méthode utilisée dans l'exemple précédent.

5.3.2 Résultats

Comme attendu, malgré une armature principale 36% plus forte dans le cas du dimensionnement élastique, les flèches calculées ne montrent pas de différences significatives (environ ½ mm d'écart à long terme, soit un 20000^e de la portée) et ne sont donc pas présentées ici.

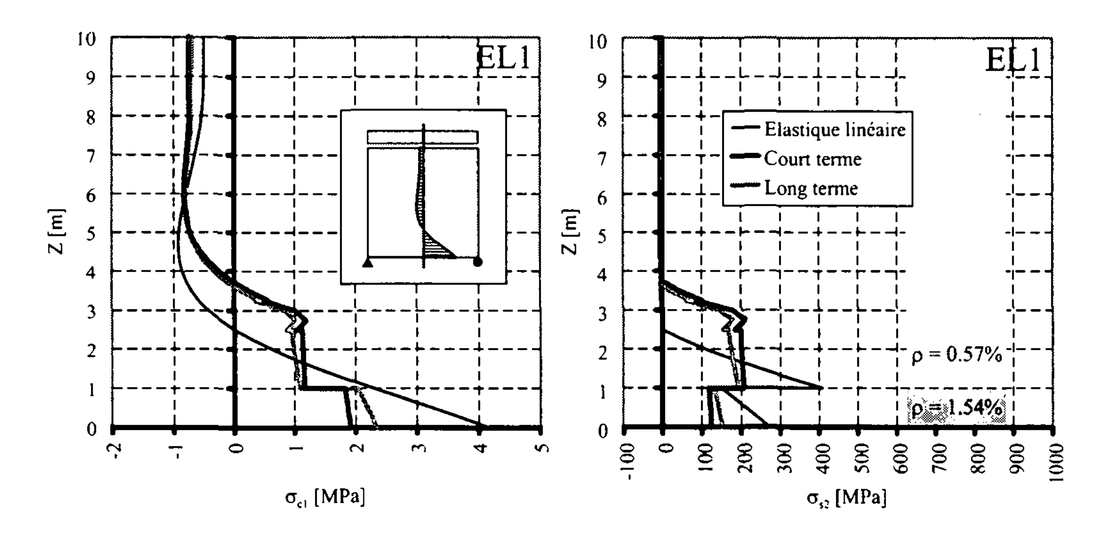


Figure 5.30: Contraintes horizontales dans le béton entre les fissures (à gauche) et contraintes max dans les armatures horizontales, soit au droit d'une fissure (à droite) pour l'élément EL1. Résultats des calculs élastique linéaire et fissuré à court terme et long terme.

La figure 5.30 montre, à gauche, les contraintes dans le béton entre les fissures (approximation : valeur de l'effort membranaire divisée par l'épaisseur de béton). A ce stade, la comparaison entre les contraintes élastiques linéaires et les contraintes en stade fissurée est édifiante. La remontée de l'axe neutre due aux redistributions de contraintes est loin d'être négligeable. La zone tendue augmente de 50%, tandis que la contrainte maximale de traction diminue d'un facteur 2. Ainsi, la zone tendue monte largement au-dessus de la hauteur de répartition de l'armature principale, égale pour ce calcul à 1 m, sollicitant du même coup

l'armature de répartition, laquelle n'est a priori destinée qu'à transmettre les charges aux armatures principales.

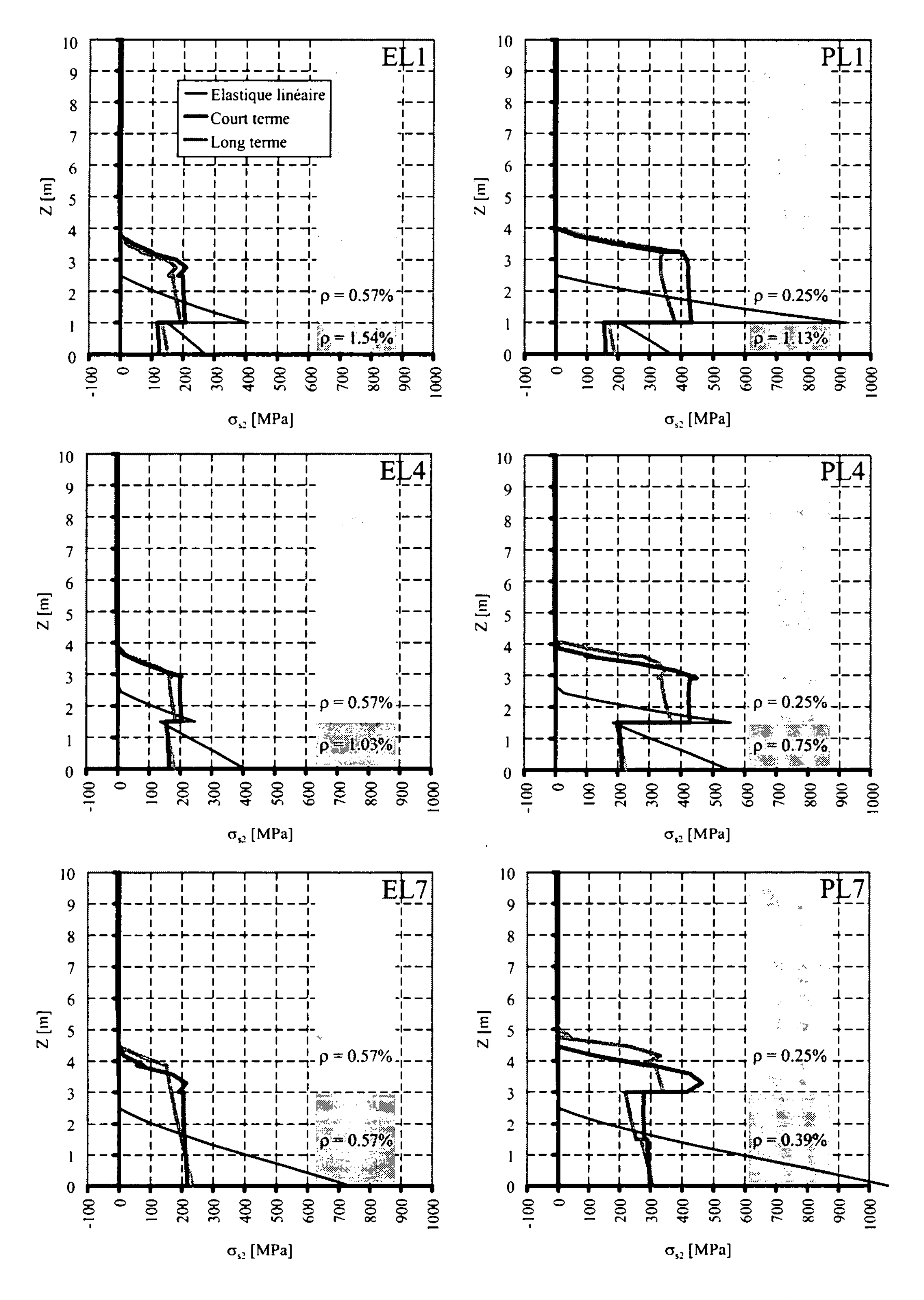


Figure 5.31: Contraintes max dans les armatures pour différentes hauteurs de répartition de l'armature principale ; $h_{rép}$ = 1 m, respectivement 1.5 m et 3 m pour les éléments EL1, PL1, respectivement EL4, PL4 et EL7, PL7

La redistribution entre court terme et long est nettement moins spectaculaire. Elle tend cependant d'une façon générale (cf. résultats suivants) à redistribuer légèrement les contraintes des armatures de répartition vers les armatures principales.

Le diagramme de droite (fig. 5.30) montre les contraintes dans les armatures au droit d'une fissure, obtenues simplement en divisant les valeurs de gauche par le taux d'armature. On constate que, du fait de son taux plus faible, l'armature de répartition présente des contraintes pratiquement deux fois plus élevées que l'armature principale. Il est nécessaire de faire ici une parenthèse.

Contrairement au calcul de poutre du paragraphe précédent, le principe de conservation des sections planes n'est plus d'application ici. De même, le contrôle de la fissuration dans les zones d'armature constructive par les armatures principales avoisinantes n'a plus la même importance dans ce contexte. S'il est vrai que le brusque saut de contraintes observé à la figure 5.30 droite au changement d'armature n'est pas réaliste, la zone réelle de transition ne couvre pas toute l'armature de répartition tendue.

Ainsi, la répartition des armatures choisie dans le cas de l'élément EL1 n'est certainement pas optimale. De plus, les contraintes plus élevées dans les armatures de répartition sont susceptibles de provoquer l'ouverture de fissures indésirables dans la partie médiane de la cloison.

Dans l'ensemble des variantes calculées (fig. 5.31 et 5.32), la distribution des efforts membranaires (fig. 5.30 gauche) varie peu. Les contraintes dans les armatures varient essentiellement en raison des variations de leur aire.

La figure 5.31 présente les contraintes dans les armatures pour différentes hauteurs de répartition de l'armature principale, laquelle a été dimensionnée en utilisant un bras de levier élastique ou plastique (tableau 5.4). On constate à nouveau que dans tous les cas les résultats élastiques linéaires sont inutilisables. Essentiellement à cause des sections d'acier plus faibles, les contraintes obtenues pour les éléments PL1, PL4 et PL7 sont systématiquement plus élevées, surtout dans les armatures de répartition qui atteignent pratiquement leur limite d'élasticité. Les contraintes dans l'armature principale varient proportionnellement à la hauteur de répartition, du fait du changement de taux d'armature induit. Les contraintes dans les armatures de répartition ne varient pratiquement pas en fonction de $h_{rép}$.

Dans les éléments PL4, PL5 et PL6 (fig. 5.32), l'armature principale est constante et c'est l'armature de répartition qui varie de 0.25% à 0.57% (Ø 8, 10 et 12 s=200). On voit que cela n'a aucune influence significative sur les contraintes dans les armatures principales, ni sur la hauteur de la zone tendue. Les contraintes dans les armatures de répartition varient en raison inverse du taux d'armature.

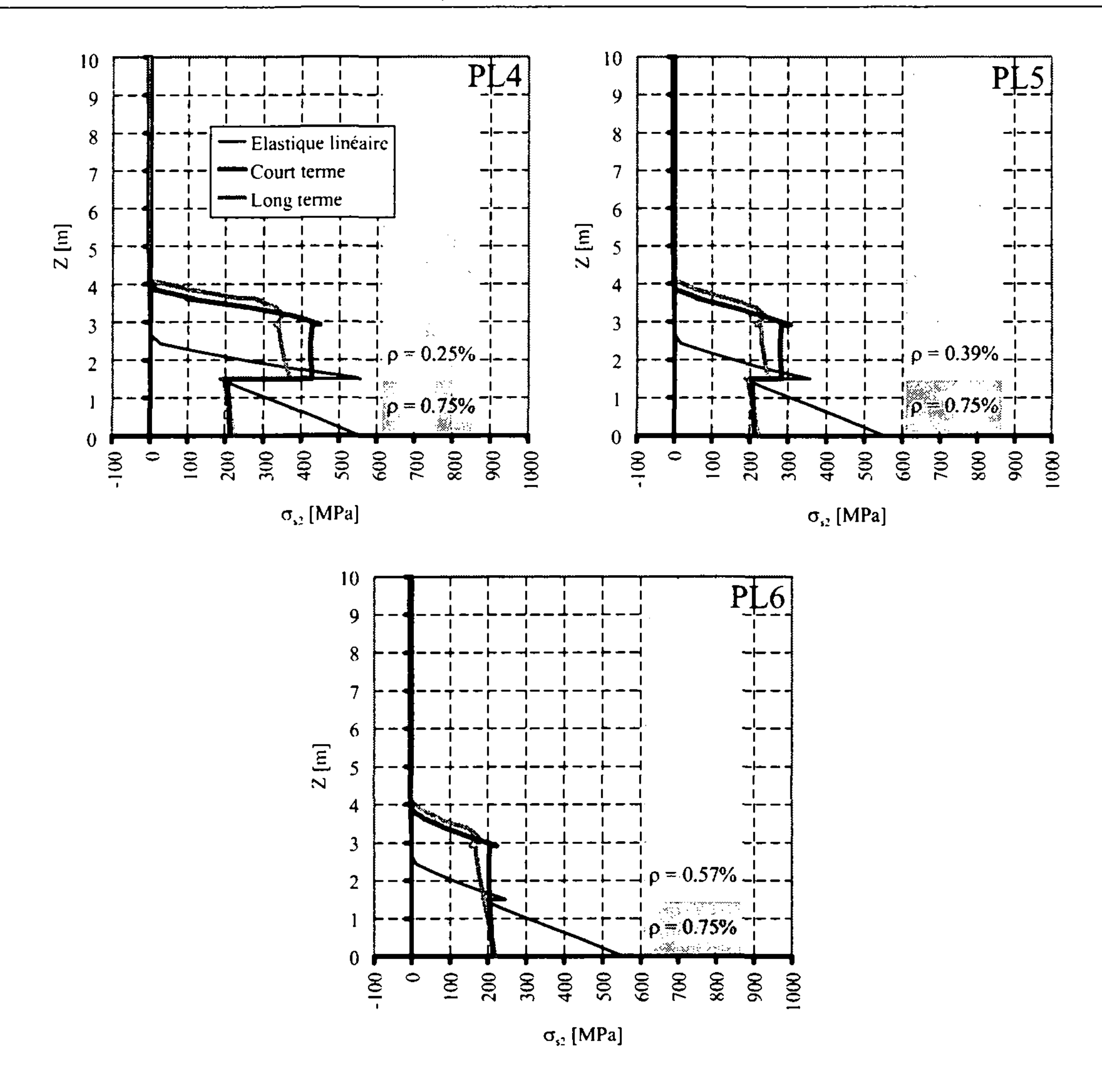


Figure 5.32: Contraintes max dans les armatures pour différents taux d'armatures de répartition

5.3.3 Commentaires et conclusions

La hauteur de la zone tendue dépasse largement la zone de répartition de l'armature principale. Les redistributions de contraintes dues à la fissuration induisent une remontée de l'axe neutre bien au-delà de la zone tendue obtenue par un calcul élastique linéaire. On est donc encore plus loin que le concept proposé déjà en 1945 par Sarrasin [65], qui conseillait d'étendre l'armature principale sur toute la zone tendue élastique linéaire afin de limiter la fissuration. Il semblerait que cette notion, pouvant paraître a priori excessive, soit encore en-dessous de la vérité. Ajoutons à cela que des comportements similaires aux résultats obtenus ici ont été observés expérimentalement par Braam [12] qui a étudié l'influence de la disposition des armatures constructives sur la répartition de la fissuration dans des poutres à âme haute.

A titre d'exemple, considérons le critère de limitation des contraintes dans les armatures à l'état de service de la norme suisse SIA 162 [68] (exigences sévères). En traction pure, pour

une limitation de l'ouverture moyenne des fissures à 0.2 mm, les contraintes à l'état permanent ne doivent pas dépasser 200, resp. 150 et 120 N/mm^2 pour un écartement des armatures de 100, resp. 150 et 200 mm. Au niveau des armatures de répartition, aucun des éléments calculés ici ne respecte ce critère. Pour les armatures principales, seuls les éléments EL1 et PL1 répondent aux exigences, et ce en grande partie grâce au faible écartement des barres mises en place. Encore que, vu les contraintes obtenues, les armatures de répartition de l'élément PL1 sont nettement insuffisantes. Sur cette base, une solution acceptable pour le cas présenté serait d'utiliser telle quelle l'armature principale de l'élément EL2, et, pour les armatures de répartition, de remplacer les Ø12 s = 200 par des Ø8 s = 100 sur le reste de la zone tendue (même aire, barres plus serrées).

Un dimensionnement basé uniquement sur des critères de rupture, aboutissant par exemple à l'élément PL1, déboucherait indubitablement sur de mauvaises surprises à l'état de service. Il faut cependant relativiser ces résultats, dans la mesure où les charges appliquées sont particulièrement défavorables. Malgré cela, même un niveau de chargement réduit de moitié ne résoudrait pas complètement le problème pour les éléments PLx, étant donné le niveau de contraintes atteint dans les armatures de répartition. La prudence reste donc de mise, spécialement en ce qui concerne les armatures de répartition.

5.4 Conclusions

Le modèle de calcul a montré son efficacité pour le traitement de structures relativement complexes. Il a néanmoins été poussé dans ses derniers retranchements par son application à des cas répondant de façon approximative à la définition de *structure composée de parois minces* – l'exemple le plus extrême étant ici le calcul d'une poutre simple à section rectangulaire (§ 5.2.1). Des éléments de méthode de calcul ont également été ajoutés, concernant le calcul des contraintes dans les armatures, ainsi que l'évaluation des déformations dues à l'effort tranchant.

Les exemples numériques traités dans ce chapitre ne sont certainement pas exhaustifs, ni ne prétendent avoir traité à fond les problèmes abordés. Un certain nombre de questions sont néanmoins posées, et les éléments de réponse apportés montrent que ces problèmes méritent qu'on s'y intéresse de plus près.

Dans l'analyse à l'état de service des ouvrages d'art en béton précontraint, le choix de la quantité de précontrainte est un paramètre crucial. Plusieurs études ont déjà montré que, pour des niveaux relativement faibles de précontrainte, de nombreuses incertitudes apparaissent dans le comportement à court terme et à long terme. Une précontrainte dont le degré de compensation des déformations est supérieur ou égal à 0.8 permet d'éliminer une grande part de ces incertitudes, et ainsi de calculer de façon plus précise le comportement à l'état de

service. Les calculs réalisés ont étendu et confirmé ce concept aux notions de déformations dues à l'effort tranchant et de largeur efficace. Concernant les valeurs de β inférieures ou égales à 0.6, leur utilisation nécessite, sinon le recours à des outils de calcul tels que celui utilisé ici, tout au moins une étude de sensibilité des phénomènes susmentionnés.

Les deux autres exemples de calcul ont montré – ou plus exactement confirmé – qu'une utilisation excessive de la théorie de la plasticité pour le dimensionnement des structures conduit inévitablement à des comportements insatisfaisants à l'état de service. Preuve en est faite notamment en ce qui concerne le dimensionnement des armatures d'effort tranchant dans les poutres et des armatures des poutres cloisons. Dans le même contexte, le rôle des armatures dites constructives ou de répartition ne peut pas être ignoré.

6 Conclusions

6.1 Développements

Un outil de calcul puissant, permettant d'analyser le comportement à long terme de structures en béton armé et précontraint composées de parois minces, est désormais disponible. Le modèle d'éléments finis de coque sur lequel il s'appuie permet l'étude de géométries complexes, et d'autre part le modèle de comportement développé pour les membranes en béton armé (LTM 2D) a montré son efficacité et sa fiabilité tant dans la reproduction de résultats expérimentaux que dans l'étude de cas particuliers.

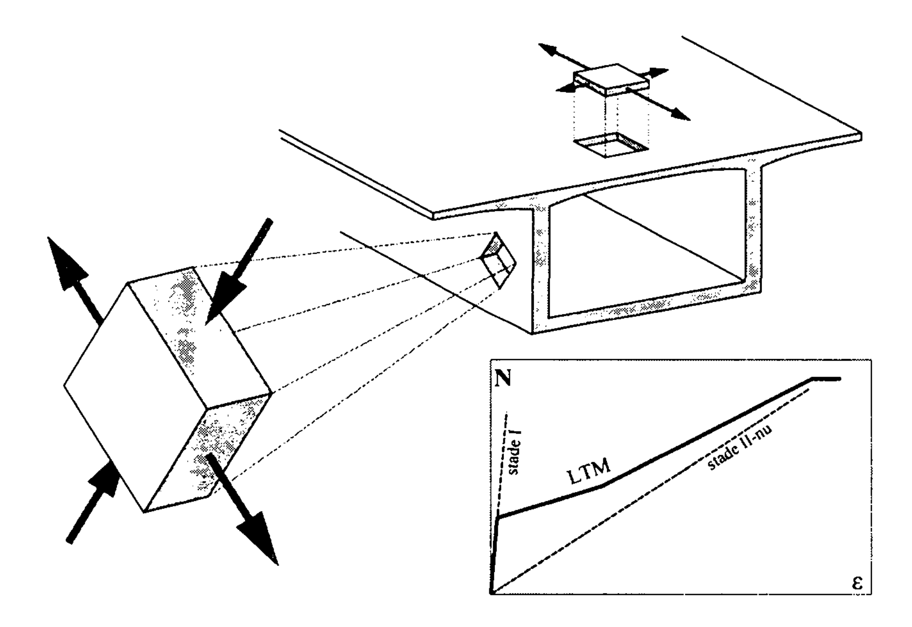


Figure 6.1: LTM 2D: Application de la LTM selon les directions principales des efforts membranaires

Une particularité du modèle de calcul en coque développé est que le calcul des variations de rigidité dues aux non linéarités matérielles du béton armé ne prend en compte que les efforts membranaires (fig. 6.1). En effet, le comportement global de beaucoup de structures à parois minces est essentiellement dirigé par le comportement local membranaire des parois qui les composent. Cette constatation a motivé le choix d'un modèle de comportement de **membrane en béton armé**. Le modèle développé est donc à même de représenter des structures à parois minces dont le comportement est essentiellement membranaire. Les composantes de rigidité flexionnelle de l'élément coque, nécessaires à l'équilibre, varient de la même façon que les composantes membranaires. Etant donné l'orientation du modèle de calcul vers l'étude du

comportement en service à long terme, les actions permanentes sont seules prises en compte. La précontrainte est définie par la saisie directe du tracé et de la tension des câbles.

L'objectif initial, qui visait la mise à disposition des ingénieurs de la pratique de cet outil, semble quelque peu sujet à caution. En effet, si la saisie des données et l'utilisation du code de calcul développé répondent à cette attente compte tenu de la nature des calculs envisagés, l'exploitation des résultats reste délicate. Cela est notamment visible dans le cas du calcul de la poutre simple au chapitre 5. Somme toute, malgré une accessibilité d'un niveau comparable à celui d'un logiciel de calcul en coque classique, il paraît prudent de le réserver à un public averti.

En annexe à cet outil de calcul principal, des méthodes périphériques ont été mises en place. La première permet de déterminer la part de déformations dues à l'effort tranchant dans une poutre continue. La seconde, d'application plus immédiate, permet d'évaluer les contraintes dans les armatures sur la base des efforts membranaires issues du calcul en coque. Quoique approximative, cette méthode donne de relativement bons résultats et une estimation de leur précision à un coût de calcul très bas.

Enfin, destiné avant tout à la recherche, le moteur de calcul de sections et d'études paramétriques massives AlphaFlex constitue une « boîte à outils » d'un secours appréciable pour tester et calibrer toutes sortes de modèles de calcul. Son code, écrit en Fortran, est ouvert et peut être complété à loisir, dans la mesure des besoins.

6.2 Applications numériques

Le modèle de calcul de coque en béton armé développé a montré son efficacité pour le traitement de structures relativement complexes. Il a néanmoins été poussé dans ses derniers retranchements par son application à des cas répondant de façon approximative à la définition de *structure composée de parois minces* – l'exemple le plus extrême étant ici le calcul d'une poutre simple à section rectangulaire.

Les exemples numériques traités ne sont certes pas exhaustifs, ni ne prétendent avoir traité à fond les problèmes abordés. Un certain nombre de questions sont néanmoins posées, et les éléments de réponse apportés montrent que ces problèmes méritent qu'on s'y intéresse de plus près.

Précontrainte

Dans l'analyse à l'état de service des ouvrages d'art en béton précontraint, le choix de la quantité de précontrainte est un paramètre crucial. Plusieurs études ont déjà montré que, pour

des niveaux relativement faibles de précontrainte, de nombreuses incertitudes apparaissent dans le comportement à court et à long terme. Une précontrainte dont le degré de compensation des déformations est supérieur ou égal à 0.8 permet d'éliminer une grande part de ces incertitudes, et ainsi de calculer de façon plus précise le comportement à l'état de service. Les calculs réalisés ont étendu et confirmé ce concept aux notions de déformations dues à l'effort tranchant et de largeur efficace. Concernant les valeurs de β inférieures ou égales à 0.6, leur utilisation nécessite, sinon le recours à des outils de calcul tels que celui utilisé ici, tout au moins une étude de sensibilité des phénomènes susmentionnés.

Influence des hypothèses de dimensionnement à la rupture sur l'état de service

Les deux autres exemples de calcul ont montré – ou plus exactement confirmé – qu'une utilisation excessive de la théorie de la plasticité pour le dimensionnement des structures conduit inévitablement à des comportements insatisfaisants à l'état de service. Preuve en faite notamment en ce qui concerne le dimensionnement des armatures d'effort tranchant dans les poutres et des armatures des poutres cloisons. Dans le même contexte, le rôle des armatures dites constructives ou de répartition ne peut pas être ignoré.

6.3 Recommandations

Certains enseignements peuvent être tirés des résultats obtenus, concernant tant la conception des ouvrages que leur modélisation à l'état de service. Etant donné le caractère limité des études numériques menées, les recommandations formulées ci-après le sont également et ne doivent pas être inconsidérément extrapolées.

6.3.1 Recommandations constructives

Précontrainte

Le choix de la quantité de précontrainte dans un ouvrage d'art est toujours un sujet épineux. Plusieurs études ont déjà été menées à ce sujet et ont conclu qu'une précontrainte suffisamment importante est à même de réduire, voire d'éliminer certaines incertitudes inhérentes au comportement non linéaire du béton, et d'ainsi permettre une meilleure prévision du comportement à long terme des ouvrages, ainsi qu'une amélioration de leur durabilité. Les résultats obtenus dans ce travail ont confirmé ces conclusions et abouti à des conclusions identiques concernant la largeur efficace du tablier sur appui et les déformations d'effort tranchant. Ainsi, une précontrainte telle que

$$\beta \geq 0.8$$

doit permettre d'éliminer des analyses à l'état de service une grande partie des incertitudes dont elles sont habituellement entachées. De plus, le respect de ce critère permet d'utiliser sans problème une modélisation en barres pour le calcul des ponts poutre.

Armatures d'effort tranchant dans les poutres

Pour un comportement idéal à l'état de service, la meilleure solution serait de choisir une inclinaison des bielles pour le dimensionnement à la rupture identique à celle de l'état de service. Cela n'est évidemment pas possible en pratique, et somme toute peu économique. D'après les résultats obtenus, il serait souhaitable de choisir en tous les cas

$$\alpha \geq 45°$$

et de disposer des armatures constructives longitudinales suffisantes, c'est à dire du même ordre de grandeur que les étriers. Ces résultats méritent toutefois d'être utilisés avec prudence, la LTM 2D ayant été poussée dans ses derniers retranchements dans ces calculs.

Armatures dans les poutres-cloisons

Suite à la fissuration, les redistributions de contraintes dans une poutre cloison sont susceptibles d'amener la hauteur de la zone tendue nettement au-delà de la zone obtenue d'un calcul élastique linéaire. Pour un contrôle satisfaisant de la fissuration, il est à tout le moins souhaitable d'utiliser une armature de répartition le plus serrée possible sur une à une fois et demie la hauteur de la zone tendue issue d'un calcul élastique linéaire, faute de quoi une importante fissuration est susceptible de se développer au-dessus des armatures principales, dans la zone de répartition.

6.3.2 Modélisation pour le calcul non-linéaire

6.3.2.1 Calcul simplifié en barre

Pour des structures présentant un degré de compensation des déformations $\beta \geq 0.8$, les calculs habituels en barres restent d'application. Les déformations d'efforts tranchant – dont la prise en compte est recommandée – et la largeur efficace réduite peuvent être pris en compte de la même façon que pour un calcul élastique linéaire.

Si $\beta \leq 0.6$, il convient d'être prudent. Il devient alors nécessaire d'effectuer une étude de sensibilité en considérant les déformations d'effort tranchant et la largeur efficace réduite comme paramètres. En première approximation, on peut admettre que le pourcentage de déformations dues à l'effort tranchant peut aller jusqu'à 10% au-dessus de sa valeur élastique linéaire (éq. 6.1). Pour la largeur efficace réduite, la fourchette de variation est limitée par la valeur élastique linéaire et la largeur totale du tablier (éq. 6.2).

$$\frac{w_{V,élastique}}{w_{tot,élastique}} \leq \frac{w_V}{w_{tot}} \leq \frac{w_{V,élastique}}{w_{tot,élastique}} + 10\% \tag{6.1}$$

$$b_{eff,élastique} \leq b_{eff} \leq b_{tot} \tag{6.2}$$

6.3.2.2 Calcul en coque

Un calcul non linéaire en coque est évidemment possible à l'aide de l'outil de calcul développé ici. La règle quant aux incertitudes reste la même par rapport à la valeur de β. Il demeure néanmoins que pour $\beta \leq 0.6$ on ne peut pas faire l'économie d'une étude de sensibilité sur les paramètres potentiellement sujets à une forte variation (résistance à la traction notamment).

L'exploitation des résultats doit être faite avec la plus grande prudence. Contrairement à un calcul élastique linéaire, il est très difficile de contrôler les résultats d'un calcul coque non linéaire. Le bon sens de l'ingénieur est le meilleur outil de contrôle possible en l'occurrence.

Enfin, le respect des hypothèses du modèle de calcul est primordial. Rappelons une dernière fois que la LTM 2D ne traite pas la flexion locale dans les éléments de coque. Seuls les efforts membranaires sont pris en compte dans le calcul de la fissuration.

6.4 Perspectives

6.4.1 Développements

Nombre de simplifications ont été posées comme hypothèses de base dans la formulation de la LTM 2D et son implémentation dans MAPS. Voici quelques extensions possibles du modèle actuel. La plupart sont relativement onéreuses du point de vue des développements.

- Prise en compte de la flexion locale dans le calcul coque non-linéaire à l'aide d'un modèle multicouches
- Introduction d'un modèle numérique incrémental pour le calcul du fluage, permettant un calcul rigoureux du cumul des fonctions de fluage, des redistributions d'efforts/contraintes

dans le temps, ainsi que la prise en compte d'actions progressivement variables dans le temps telles que le retrait différentiel ou les tassements d'appuis. Cela permettrait également, à condition d'adapter - ou de remplacer - le moteur de calcul par éléments finis, de traiter de façon rigoureuse le phasage de construction.

- Implémentation et comparaison d'un modèle de membrane de type MCFT

6.4.2 Application du modèle développé à des cas plus complexes

Un puissant outil de calcul est maintenant disponible, et les applications numériques intéressantes ne manquent pas. Nombre de cas n'ont pas été explorés qui auraient mérité de l'être, tout simplement faute de temps.

- Ponts en encorbellement : importantes déformations d'effort tranchant dans les âmes sur appuis et déplacement du centre de gravité de la section sous l'effet du fluage
- Ponts courbes, ponts à section asymétrique
- Poutres-cloisons avec ou sans ouvertures, avec ou sans précontrainte
- Sheds en tant que structures plissées
- Introduction d'une charge concentrée excentrée dans un pont-caisson
- Tassement différentiel d'un tunnel en tranchée couverte ou immergé.

Références bibliographiques

[1] **ACI 318-89**, *Building Code Requirements for Reinforced Concrete*, ACI 318-89, Detroit, USA, Michigan, **1989**.

[2] **ADEBAR P., COLLINS M.P.**, *Shear strength of members without transverse reinforcement*, Canadian Journal of Civil Engineering, vol. 23, pp 30-41, Canada, english, **1996**.

[3] **AHMAD S., IRONS B.M., ZIENKIEWICZ O.C.**, *Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements*, International Journal for numerical Methods in Engineering, vol. 2, pp 419-451, USA, english, **1970**.

[4] **AL-KUBAISY M.A., YOUNG A.G.**, *Failure of concrete under sustained tension*, Magazine of Concrete Research, 27, 171-178, Leicester, England, english, **1975**.

[5] **BATHE K.J.**, *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall, 735 pp, MIT, USA, english, **1982**.

[6] **BATOZ J.-L., DHATT G.**, *Modélisation des structures par éléments finis*, Hermès, 3 vol., 1500 pp, Paris, France, **1990**.

[7] **BAZANT Z., XIANG Y., ADLEY M., PRAT P. C., AKERS S. A.**, *Microplane model for concrete. II: Data delocalization and verification*, Journal of engineering Mechanics (ASCE), vol. 122 N° 3, pp 255-262, USA, english, **1996**.

[8] **BAZANT Z., XIANG Y., PRAT P. C.**, *Microplane model for concrete. I: Stress-strain boundaries and finite strain*, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), vol. 122 N° 3, pp 245-254, USA, english, **1996**.

[9] **BELARBI A., HSU T.T.C.**, *Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete*, ACI Structural Journal, vol. 91 n° 4, pp 465-474, USA, english, **1994**.

[10] **BOUBERGUIG A.**, *Calcul statique des coques nervurées et précontraintes*, thèse de doctorat no 473, EPFL, 253 p., Lausanne, Suisse, **1983**.

[11] **BOUBERGUIG A., ROSSIER S., FAVRE R., CHARIF H.**, *Calcul non linéaire du béton armé et précontraint*, Revue Française du Génie Civil, vol. 1 n° 3, pp 503-568, Paris, France, **1997**.

[12] **BRAAM C. R.**, *Control of crack width in deep reinforced concrete beams*, Thèse de doctorat - Delft University, Hollande, english, **1990**.

[13] **BRUGGELING A.**, *Structural Concrete - Theory and its application*, A. A. Balkema, 470 pp, Rotterdam, Netherlands, english, **1991**.

[14] **BRÜHWILER E.**, *Short Course on Engineering Applications of Fracture Mechanics of Concrete Structures*, Publication MCS, Lausanne, Suisse, english, **1998**.

[15] **CEB**, *RC elements under cyclic loading*, bulletin no 230 CEB, Thomas Telford Publications, 190 pp, London, UK, english, **1996**.

[16] **CEB**, *Bulletin 235: Serviciability Models: behaviour and modelling in serviciability limit states including repeated and sustained loads*, CEB (Comité euro-international du béton),, Bulletin 235, Stuttgart, Allemagne, english, **1997**.

[17] **CEB**, *CEB-FIP Model Code 1990*, CEB (Comité euro-international du béton), Thomas Telford, **1993**.

[18] **CHARIF H.**, *Réduction des déformations des structures en béton grâce à l'utilisation de bétons à hautes performances*, thèse de doctorat no 844, EPFL - IBAP, 220 pp, Lausanne, Suisse, **1990**.

[19] **CLARK L.A., CRANSTON W.B.**, *The influence of bar spacing on tension stiffening in reinforced concrete slabs*, Advances in concrete slab technology, proceedings of the International conference on concrete slabs, ed. Ravindra K. Dhir, pp 118-128, Dundee, Ecosse, english, **1979**.

[20] **COLLINS M.P.**, *Procedures for calculating the shear response of reinforced concrete elements: a discussion*, Journal of Structural Engineering, vol. 124 n° 12, pp 1485-1488, USA, english, **1998**.

[21] **COPE R.J., CLARK L.A.**, *Concrete slabs - analysis and design*, Elsevier applied science publishers, 502 pp, London, UK, english, **1984**.

[22] **DEBERNARDI P. G., TALIANO M.**, *Experimental measurements of shear deformation in feinforced concrete beams*, FIB, Com 4 TG 1, Serviceability models, Czech Republic, english, **1999**.

[23] **EUROCODE 2**, *Calcul des Structures en Béton*, Ingénieurs et architectes suisses, Prénorme européenne, Partie 1, SIA V 162.001, Zurich, Suisse, **1992**.

[24] **EYMARD R.**, *Allowing the creep of concrete in a finite-element structural calculation*, 12e congrès de la FIP, La technique française du béton précontraint, AFPC, pp 155-165, Washington, USA, english, **1994**.

[25] **FARRA B.**, *Influence de la résistance du béton et de son adhérence avec l'armature sur la fissuration*, thèse de doctorat no 1359, EPFL - IBAP, 171 pp, Lausanne, Suisse, **1995**.

[26] **FAVRE R., BEEBY A.W., FALKNER H., KOPRNA M., SCHIESSL P.**, *Cracking and deformations*, CEB-Manual, 250 pp, Lausanne, Suisse, english, **1985**.

[27] **FAVRE R., BURDET O., CHARIF H., HASSAN M., MARKEY I.F.**, *Enseignements tirés d'essais de charge et d'observations à long terme pour l'évaluation des ponts en béton et le choix de la précontrainte*, Rapport OFR, Lausanne, Suisse, **1995**.

[28] **FAVRE R., CHARIF H.**, *Déformations des structures en béton - Modèle de base et méthodes simplifiées du calcul selon les codes européens*, Ingénieurs et architectes suisses, n° 25, Lausanne, Suisse, **1992**.

[29] **FAVRE R., JACCOUD J.-P., BURDET O., CHARIF H.**, *Dimensionnement des structures en béton - Aptitude au service et éléments de structures*, Presse Polytechnique et Universitaires Romandes, Traité de Génie Civil, Vol. 8, 586 pages, Lausanne, Suisse, **1997**.

[30] **FAVRE R., JACCOUD J.-P., KOPRNA M., RADOJICIC A.**, *Dimensionnement des structures en béton - Aptitude au service et éléments de structures*, Presse Polytechnique et Universitaires Romandes, Traité de Génie Civil, Vol. 8, 439 pages, Lausanne, Suisse, **1990**.

[31] **FAVRE R., KOPRNA M., RADOJICIC A.**, *Effets différés, fissuration et déformations des structures en béton*, Editions Georgi, EPFL - CEBAP, 210 pp, St-Saphorin, Suisse, **1980**.

[32] **FIALKOW M.N.**, *Behavior of reinforced concrete membranes with compatible stress and cracking*, ACI Structural Journal, 87/5, pp 571-582, Detroit, USA, english, **1990**.

[33] **FREY F., JIROUSEK J.**, *Structures tridimensionnelles à parois minces*, EPFL - ISS - Laboratoire de mécanique des structures et milieux continus (LSC), Lausanne, Switzerland, **1992**.

[34] **GRANGER L.**, *La modélisation du comportement différé du béton - La modélisation du fluage*, ENPC, Formation Flash, "Les éléments finis appliqués au calcul des ouvrages précontraints", Paris, France, **1996**.

[35] **HARTL G.**, *Die Arbeitslinie "Eingebetteter Stähle" unter Erst- und Kurzzeitbelastung*, Beton- und Stahlbetonbau, vol. 78 Heft 8, pp 221-224, Allemagne, deutsch, **1983**.

[36] **HASSAN M.**, *Critères découlant d'essais de charge pour l'évaluation du comportement des ponts en béton et pour le choix de la précontrainte*, Thèse de doctorat n° 1296 - EPFL, Lausanne, Suisse, **1994**.

[37] **HELD A.**, *Influence de la précontrainte sur le comportement en service des ponts en béton*, Travail pratique de diplôme - EPFL - Génie Civil, Lausanne, Suisse, **1998**.

[38] **HILLERBORG A.**, *Analysis of a single crack*, Fracture mechanics of conrete edited by F.H.Wittmann, Elsevier science Publishers B.V., pp 223-249, Amsterdam, Hollande, **1983**.

[39] **HSU T.T.C.**, *Softened truss model theory for shear and torsion*, ACI Structural Journal, 85/6, pp 624-635, Detroit, USA, english, **1988**.

[40] **HSU T.T.C.**, *Stresses and crack angles in concrete membrane elements*, Journal of Structural Engineering, vol. 124 n° 12, pp 1476-1484, USA, english, **1998**.

[41] **HSU T.T.C., ZHANG L.-X.**, *Tension stiffening in reinforced concrete membrane elements*, ACI Structural Journal, vol. 93 n° 1, pp 108-115, USA, english, **1996**.

[42] **JAIN O.P., TRIKHA D.N., AGARWAL S.**, *A finite element solution of post cracking behaviour of RC slabs*, Advances in concrete slab technology, proceedings of the International conference on concrete slabs, ed. Ravindra K. Dhir, pp 129-139, Dundee, Ecosse, english, **1979**.

[43] **JIRÁSEK M.**, *Numerical modeling of deformation and failure of materials*, Czech Technical University, Prague, Tchéquie, english, **1998**.

[44] **KARIHALOO B.**, *Fracture mechanics & structural concrete*, Concrete Design and Construction, Longman scientific & technical, Sydney, Australia, **1995**.

[45] **KAUFMANN W., MARTI P.**, *Structural concrete: cracked membrane model*, Journal of Structural Engineering, vol. 124 n° 12, pp 1467-1475, USA, english, **1998**.

[46] **KOPRNA M.**, *Effets différés, fluage, retrait relaxation*, EPFL - IBAP, 65 pp, Lausanne, Suisse, **1986**.

[47] **KOTSOVOS M.D., PAVLOVIC M.N.**, *Structural concrete - finite-element analysis for limit-state design*, Thomas Telford Publications, 550 pp, London, UK, english, **1995**.

[48] **KUPFER H., HILSDORF H., RUSCH H.**, *Behavior of Concrete under Biaxial Stresses*, Journal of the American Concrete Institute, Proceedings, vol. 66 No 8, pp 656-666, Detroit, USA, Michigan, english, **1969**.

[49] **LAURENCET P.**, *Ouverture des fissures résiduelles à long terme suite aux actions variables dans les structures en béton*, Thèse de doctorat, Lausanne, Suisse, **1999**.

[50] **LAURENCET P., ROTILIO J.-D., JACCOUD J.-P., FAVRE R.**, *Influence des actions variables sur l'état permanent des ponts en béton précontraint*, Rapport OFROU, 171 pages, Berne, , **1999**.

[51] **MARKEY I.F.**, *Enseignements tirés d'observations des déformations de ponts en béton et d'analyses non linéaires*, Thèse de doctorat - EPFL, Lausanne, Suisse, **1994**.

[52] **MARTI P.**, *How to treat shear in structural concrete*, ACI Structural Journal, vol.96, pp 408-414, USA, english, **1999**.

[53] **MARTI P., ALVAREZ M., KAUFMANN W., SIGRIST V.**, *Tension chord model for structural concrete*, Structural Engineering International, vol. 8 n° 4, pp 287-298, USA, english, **1998**.

[54] **MILFORD R.V., SCHNOBRICH W.C.**, *Numerical model for cracked reinforced concrete*, Proceedings of the International Conference on Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures, part 1, pp 71-84, Split, Yugoslavia, english, **1984**.

[55] **MITCHELL D., COLLINS M.P.**, *Diagonal compression field theory - a rational model for structural concrete in pure torsion*, ACI Journal, vol. 71 n° 8, pp 396-408, USA, english, **1974**.

[56] **MUTTONI A., SCHWARTZ J., THÜRLIMANN B.**, *Bemessung von Betontragwerken mit Spannungsfeldern*, Birkhäuser, 145 pp, Basel, Suisse, deutsch, **1997**.

[57] **OZBOLT J., BAZANT Z.**, *Numerical smeared fracture analysis: Nonlocal microcrack interaction approach*, International Journal for numerical Methods in Engineering, vol. 39, pp 635-661, USA, english, **1996**.

[58] **PRAT M.**, *Apports de la méthode des éléments finis*, ENPC, Formation Flash, "Les éléments finis appliqués au calcul des ouvrages précontraints", Paris, France, **1996**.

[59] **PRAT M., BISCH P., MESTAT P., MILLARD A., PIJAUDIER-CABOT G.**, *Calcul des ouvrages généraux de construction*, Hermès, 767 pp, Paris, France, **1997**.

[60] **PRAT M., CLÉMENT J.-L., PASCHETTA W., ULM F.J.**, *Application des éléments finis au calcul des ouvrages précontraints*, 13e congrès de la FIP, La technique française du béton, AFPC, pp 163-169, Amsterdam, Pays-Bas, **1998**.

[61] **REINHARDT H. W., CORNELISSEN H. A. W.**, *Zeitstandzugversuche an Beton*, Baustoffe '85, 162-167, Delft, Pays-Bas, deutsch, **1985**.

[62] **ROSSIER S., BURDET O., FAVRE R.**, *Concrete tie model for the flexural behavior of RC and PC sections*, 2nd International PhD Symposium in Civil Engineering, Budapest, Hongrie, **1998**.

[63] **ROTILIO J.-D.**, *Contribution des actions variables aux déformations à long terme des ponts en béton*, Thèse de doctorat - EPFL, 1870, Lausanne, Suisse, **1998**.

[64] **SAOUMA V. E.**, *Introduction to continuum mechanics and elements of elasticity/solid mechanics*, EPFL, département des matériaux, laboratoire des matériaux de construction, lau, Suisse, english, **1998**.

[65] **SARRASIN A.**, *Béton armé*, Contributions à l'étude de la création de possibilités de travail, Questions techniques, F. Rouge & Cie S.A., Librairie de l'Université de Lausanne, N°10, 57 p., Lausanne, Suisse, **1945**.

[66] **SHKOUKANI H., WALRAVEN J. C.**, *Sustained tensile strength of concrete*, IABSE Colloqium, pp 725-729, Stuttgart, Allemagne, **1991**.

[67] **SIA**, *Actions sur les structures porteuses: SIA 160*, Norme Suisse, 505 160, Switzerland, **1989**.

[68] **SIA 162**, *Ouvrages en béton*, Société Suisse des Ingénieurs et des Architectes - Norme, Vol. 162, Zürich, Suisse, **1993**.

[69] **SIPPEL T.M.**, *Zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetontragwerken unter Betriebsbelastung*, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Mitteilungen, Universität Stuttgart, Allemagne, Allemand, **1996**.

[70] **STEMPNIEWSKI L., EIBL J.**, *Finite Elemente im Stahlbeton*, Betonkalender, Ernst & Sohn, 82/1, pp 249-312, Berlin, Allemagne, deutsch, **1993**.

[71] **TIMOSHENKO S., WOINOWSKY-KRIEGER S.**, *Theory of plates and shells - 2nd edition*, McGraw-Hill International Editions, 580 pp, Singapore, , english, **1985**.

[72] **TREVINO J.**, *Méthode directe de calcul de l'état de déformation et de contrainte à long terme d'une structure composée*, Thèse de doctorat no 728, EPFL - IBAP, Lausanne, Suisse, **1988**.

[73] **ULM F.J.**, *La modélisation de la précontrainte - L'introduction de la précontrainte dans les éléments finis*, ENPC, Formation Flash, "Les éléments finis appliqués au calcul des ouvrages précontraints, Paris, France, **1996**.

[74] **VAN DER VEEN C.**, *Cryogenic bond stress-slip relationship*, Thèse de doctorat - Delft University, 111 pp, Delft, Pays-Bas, english, **1990**.

[75] **VECCHIO F.J., COLLINS M.P.**, *The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear*, ACI Journal, vol. 83, pp 219-231, USA, english, **1986**.

[76] **VISMANN U.**, *Zuverlässigkeitstheoretische Verifikation von Bemessungskriterien im Stahlbetonbau*, Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau Technische Universität München, vol. 4/95, 241 pp, München, Allemagne, deutsch, **1995**.

[77] **WALRAVEN J. C.**, *Aggregate interlock under dynamic loading*, Darmstadt Concrete, 2, pp 143-156, Germany, english, **1987**.

[78] **WALRAVEN J. C.**, *Aggregate interlock: a theoritical and experimental analysis*, Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering, 197 p., Delft, Hollande, english, **1980**.

[79] **WALRAVEN J. C., FRÉNAY J., PRUIJSSERS A.**, *Influence of concrete strength and load history on the shear friction capacity of concrete members*, PCI Journal, pp 66-83, english, **1987**.

[80] **WALTHER R., MIEHLBRADT M.**, *Dimensionnement des structures en béton - Bases et technologie*, Presse Polytechnique et Universitaires Romandes, Traité de Génie Civil, Vol. 7, 388 pages, Lausanne, Suisse, **1990**.

[81] **WU Z., YOSHIKAWA H., TANABE T.**, *Tension stiffness model for cracked reinforced concrete*, Journal of Structural Engineering, vol. 117 n° 3, pp 715-732, USA, english, **1991**.

[82] **ZARARIS P.D.**, *Aggregate interlockand steel shear forces in the analysis of RC membrane elements*, ACI Structural Journal, vol. 94 n° 2, pp 159-170, USA, english, **1997**.

[83] **ZHANG L.-X., HSU T.T.C.**, *Behavior and Analysis of 100 Mpa Concrete Membrane Elements*, Journal of Structural Engineering, vol. 124 n° 1, pp 24-34, USA, english, **1998**.

[84] **ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L.**, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill international editions/fourth edition, 2 vol., 1454 p., London, UK, english, **1989**.

Annexes

A.1 Logiciel *AlphaFlex*

AlphaFlex est un logiciel de calcul de sections en BA et BP destiné avant tout à la recherche. Ecrit en FORTRAN 90, il constitue une boîte à outils ouverte pouvant être complétée si nécessaire. *AlphaFlex* ne dispose pas – pour le moment – d'une interface graphique, l'ensemble des données et résultats étant accessibles sous forme de fichiers texte. La structure du fichier de données permet de générer très simplement des combinaisons de variantes en vue d'études paramétriques massives (à titre d'exemple, le fichier de données d'une série de 3000 calculs du chapitre 3 a une taille de 1 KB).

AlphaFlex est évolutif. Plusieurs modèles de comportements et certaines fonctionnalités particulières y ont déjà été ajoutés dans le cadre de différents projets de recherche [49,63]. Son état actuel est décrit dans les pages qui suivent.

A.1.1 Principes généraux

L'algorithme de calcul de sections d'*AlphaFlex* permet l'utilisation de loi constitutives non linéaires quelconques. Le principe du calcul est basé sur l'hypothèse de conservation des sections planes, et les déformations de l'ensemble de la section sont gouvernées par les deux seuls paramètres que sont la dilatation ε_o à la fibre de référence et la courbure ψ. Le modèle de tronçon de Rotilio y ajoute un coefficient de déplanation (voir A.1.3). Un processus itératif en déformations imposées permet de trouver la configuration correspondant à des efforts donnés.

Les sections considérées possèdent un axe de symétrie vertical, tant au niveau de la géométrie que du chargement. La méthode de calcul est basée sur une discrétisation en tranches parallèles à l'axe neutre qui est horizontal. Ces tranches peuvent être de hauteur variable. Les contraintes sont supposées constantes sur la hauteur de chaque tranche. Les armatures peuvent être soit réparties à l'intérieur des tranches de béton, soit calculées séparément.

A.1.1.1 Fonctions de base

Les fonctionnalités de base contenues dans *AlphaFlex* sont les outils nécessaires à toutes analyse de section. Elles correspondent soit à des modules, soit à des routines particulières du code. Les principales fonctions sont :

- Détermination des valeurs caractéristiques de la section : inertie, rigidités axiale et flexionnelle, moment de fissuration, moment ultime
- Intégration des contraintes pour un état de déformations donné
- Détermination de l'état de déformation pour un couple d'efforts N,M donné
- Générateur de données pour les études paramétriques
- Création d'un fichier de résultats « résumé » pour les études paramétriques, ne contenant que les résultats essentiels de chaque calcul. Les résultats détaillés de chaque calcul sont stockés séparément.

A.1.1.2 Modes de calculs

Différents modes de calcul sont disponibles, tous faisant appel aux fonctions de base.

- Calcul de l'état de déformation sous sollicitations données
- Calcul complet de la loi moment-courbure complète de la section (en utilisant des lois constitutives quelconques)
- Extensions particulières, voir A.1.3

A.1.1.3 Sollicitations

En plus des efforts N et M, il est possible d'appliquer à la section deux types particuliers de sollicitation :

- Précontrainte. Un effort normal peut être appliqué sous la forme d'une contrainte uniforme sur la section. Cette possibilité est intéressante pour l'automatisation des calculs et les études paramétriques.
- Gradient thermique non-linéaire (Rotilio)

A.1.2 Algorithme général pour le calcul non linéaire des sections

A.1.2.1 Calculs des efforts sous état de déformations connu

La section à calculer est discrétisée en tranches parallèles à l'axe neutre, pouvant être d'épaisseur variable. Les dilatations et contraintes sont supposées constantes sur l'épaisseur de chaque tranche. L'allongement de chaque tranche i est déterminé par l'allongement ε_o de la fibre de référence et la courbure ψ (éq. A.1)

$$\varepsilon_i = \varepsilon_o - \psi \cdot z_i \qquad \text{(A.1)}$$

z_i étant la cote du milieu de la tranche i. Sur cette base, les contraintes dans chaque tranche sont calculées à l'aide des lois constitutives désirées (éq. A.2), et leur intégration fournit les efforts sur la section M et N (éq. A.4 et A.5). A noter que, selon la convention habituelle de l'ingénieur, un moment de flexion positif tend la fibre inférieure de la section, d'où le signe – dans les équations A.1 et A.5. L'équation A.3 donne la rigidité apparente de la tranche i.

$$\sigma_i = F_i(\varepsilon_i) \qquad \text{(A.2)}$$

$$EA_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \cdot A_i \qquad \text{(A.3)}$$

$$N = \int_A \sigma \cdot \mathrm{d}A \cong \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot A_i \qquad \text{(A.4)}$$

$$M = -\int_A \sigma \cdot (z - z_{G,I}) \cdot \mathrm{d}A \cong -\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot (z_i - z_{G,I}) \cdot A_i \qquad \text{(A.5)}$$

où F_i est la loi constitutive de la tranche i, A_i l'aire de la tranche i, n le nombre de tranches et $z_{G,I}$ la cote du centre de rigidité de la section, calculé en stade élastique linéaire (éq. A.6).

$$z_{G,I} = \frac{\int_A z \cdot \mathrm{d}EA}{\int_A \mathrm{d}EA} \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot EA_{I,i}}{\sum_{i=1}^{n} EA_{I,i}} \qquad \text{(A.6)}$$

où $EA_{I,i}$ est la rigidité apparente en stade I de la tranche i (éq. A.3).

A.1.2.2 Calcul des déformations sous efforts appliqués

Le processus itératif pour le calcul d'une section soumises à des efforts connus (effort normal et moment de flexion) est initialisé à l'aide de la solution calculée en stade I. Cette solution

élastique linéaire est explicite et fournit un bon point de départ. La méthode de Newton est utilisée pour les itérations (A.7).

$$x = f(x) \tag{A.7}$$

Note : à partir d'ici, les équation intégrales exactes sont abandonnées au profit des formulations discrètes approchées, lesquelles sont utilisées pour le calcul.

Initialisation

Les rigidités axiale et flexionnelle globales de la section sont calculées en stade I.

$$EA_I = \sum_{i=1}^{n} EA_{I,i} \tag{A.8}$$

$$EI_I = \sum_{i=1}^{n} (z_i - z_G)^2 \cdot EA_{I,i} + \sum_{i=1}^{n} EI_{I,i} \cong \sum_{i=1}^{n} (z_i - z_G)^2 \cdot EA_{I,i} \tag{A.9}$$

Pour le calcul de la rigidité flexionnelle globale, la rigidité flexionnelle propre $EI_{I,i}$ de chaque tranche est faible et donc négligée. Seuls les termes de déplacement des rigidités axiales sont utilisés. Les rigidités globales obtenus par les équations A.8 et A.9 ainsi que la position du centre de rigidité donné par l'équation A.6 sont les valeurs de départ pour les itérations :

$$EA^o = EA_I \text{ et } EI^o = EI_I \text{ et } z_G^o = z_{G,I} \tag{A.10}$$

Itérations

Ensuite, le processus itératif se déroule comme suit pour l'itération j :

- Calcul des déformations en utilisant les rigidités courantes :

$$\varepsilon_G^j = \frac{N}{EA^{j-1}} \tag{A.11}$$

$$\psi^j = \frac{M}{EI^{j-1}} \tag{A.12}$$

$$\varepsilon_o^j = \varepsilon_G^j + \psi^j \cdot z_G^{j-1} \tag{A.13}$$

- Calcul des contraintes σ_i^j et des rigidités apparentes des tranches et intégration des efforts N^j et M^j à l'aide des équations A.2 à A.5, toujours par rapport au centre de rigidité calculé en stade I.
- Calcul de la position du centre de rigidité

$$z_G^j = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot EA_i^j}{\sum_{i=1}^{n} EA_i^j} \tag{A.14}$$

- Calcul des rigidités apparentes globales

$$EA^j = \sum_{i=1}^{n} EA_i^j \tag{A.15}$$

$$EI^j = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (z_i - z_{G,j})^2 \cdot EA_i^j & \text{si } |\psi^j| < |\psi^n| \\ \dfrac{M^j}{\psi^j} & \text{sinon} \end{cases} \tag{A.16}$$

- Contrôle de convergence

$$\begin{aligned} |N - N^j| &< e \cdot |N| \\ |M - M^j| &< e \cdot |M| \end{aligned} \tag{A.17}$$

où e est la précision désirée sur les efforts.

Commentaires

Le calcul des efforts intérieurs par intégration des contraintes se fait toujours par rapport au même point de référence, le centre de rigidité de la section homogène. Par contre, les estimateurs pour les déformations durant les itérations (éq. A.11 à A.13) sont rapportés au centre de rigidité de la section courante. Cela est dû au fait que l'effort normal doit être appliqué en ce point pour éviter toute courbure sous effort normal seul.

La convergence n'est pas assurée si $N = 0$. Aussi, pour les applications numériques, un effort normal nul est remplacé par une valeur faible en compression, correspondant à une déformation donnée.

$$N_{rempl} = EA_I \cdot \varepsilon_{rempl} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{rempl} = 10^{-10} \tag{A.18}$$

A.1.3 Modèles spécifiques implémentés

Outre les classiques calculs en stade 1 et en stade 2-nu, un certain nombre de modèles de calcul particuliers ont été implémentés dans *AlphaFlex*.

Lois moment-courbure

Les lois moment-courbure CEB-FIP [17] et ACI [1] sont disponibles dans *AlphaFlex*. Leurs résultats ne sont en fait disponibles qu'à titre d'éléments de comparaison dans le mode calcul de loi moment-courbure complète sur la base de lois constitutives quelconques.

Modèles de tirant

Deux lois du tirant sont disponibles dans *AlphaFlex* : la loi du tirant CEB-FIP [17] et la loi du tirant modifiée (LTM, Rossier). Toutes deux sont utilisées en tant que lois constitutives du béton armé et appliquées à chaque tranche de la discrétisation. C'est cette démarche qui est au centre de l'étude menée au chapitre 3 de ce document.

Modèle de tronçon de poutre (Rotilio [63])

Ce modèle permet de décrire le comportement d'un tronçon de poutre soumis à un couple d'efforts N,M. Le tronçon considéré est situé précisément entre une section fissurée et la section à mi-chemin de la fissure suivante. La section fissurée est modélisée en stade 2-nu, avec la possibilité de tenir compte du comportement iso-adoucissant du béton. Sur le reste du tronçon, la déplanation des sections est prise en compte. Contrairement à l'approche de la LTM, les armatures sont modélisées indépendamment du béton, et leur interaction avec ce dernier est déterminée par une loi d'adhérence acier-béton. Ce modèle permet ainsi de calculer de façon détaillée l'état de contraintes et de déformations sur l'ensemble du tronçon de poutre considéré. Mentionnons enfin que le modèle inclut une loi de décharge qui permet de tenir compte de l'effet de charges cycliques. (le paramétrage du modèle de tronçon n'est pas décrit dans le format du fichier de données ci-après).

Mode de calcul avec dimensionnement automatique des armatures (Laurencet [49])

Il s'agit d'un mode de calcul pour l'étude de l'influence de la quantité de précontrainte sur le comportement élastique des sections en BP (paramétrage non documenté ici).

A.1.4 Manuel d'utilisation et format du fichier de données

A.1.4.1 Possibilités du programme

AlphaFlex est un programme de calcul de section BA axisymétrique en flexion composée uniaxiale.

Les différents calcul possibles sont :

- Calcul des contraintes et déformations dans la section sous efforts donnés en stade I, stade II ou par application de la loi du tirant à chaque tranche de la discrétisation
- Détermination des différentes lois moment-courbure de la section : stade I, stade II, loi moment-courbure CEB-FIP, loi moment-courbure ACI, relation moment-courbure déduite de l'application de la loi du tirant aux tranches de la discrétisation
- Analyse paramétrique multiple par spécification plusieurs valeurs pour certaines variables. Le programme effectue le type de calcul demandé pour toutes les combinaisons possibles

A.1.4.2 Description de la section

Dans cette version, un seul type de section est disponible : une section en I (cf figure) avec deux nappes d'armatures principales. Les paramètres sont définis dans un fichier de données dont le format est décrit plus loin.

A.1.4.3 Armatures

Les barres peuvent être introduites de deux façons différentes : deux nappes d'armatures principales et un taux d'armature constructive globale répartie dans toute la section. Le taux d'armature constructive est appliqué dans toutes les tranches qui ne sont pas touchées par les nappes d'armatures principales.

Une partie des paramètres de définition des armatures ne sont utilisés que pour l'application de la loi du tirant. Pour les calculs en stade I et II, et par conséquent pour les lois moment-courbure CEB et ACI, les paramètres Dmin, s et c n'entrent pas en ligne de compte. Il est clair que Dmin, s et ro sont interdépendants ; si on spécifie Dmin, il faut donner s = 0 et il sera calculé en fonction des 2 autres paramètres. Même principe pour calculer s en fonction de Dmin.

A.1.4.4 Fichiers

Tous les paramètres de calcul sont définis dans un fichier de données ayant l'extension *.dat*. Ces données sont reformattées et stockées, après discrétisation de la section, dans un fichier *.sct*. Les résultats du calcul se trouvent dans un fichier .res. Les fichiers *.res* et *.sct* sont formattés de façon à être directement lisibles par Excel.

Lors d'études paramétriques, le nombre de fichiers générés peut être important, aussi un résumé des résultats est également écrit dans le même répertoire dans le fichier *flex.res*, en donnant pour chaque calcul le nom de la section et une série de résultats numériques. Le fichier *flex.log* signale les éventuels problèmes de convergence survenus dans l'étude paramétrique.

A.1.4.5 Format du fichier de données

La structure est semblable à celle des fichiers .ini de Windows. Les données sont réparties en groupes désignés par un entête entre crochets et les les différentes variables sont assignées par un signe "égale".

La signification des variables est données ci-après. Attention : *AlphaFlex* est "case-sensitive", respectez donc scrupuleusement les majuscules et minuscules.

Les unités ne sont pas spécifiées. Il appartient à l'utilisateur d'utiliser un système d'unités consistant, aucune conversion n'étant effectuée par le programme. Toutes les relations utilisées sont consistantes ou adimensionnelles.

[BETON] paramètres de description du béton de la section (obligatoire)

Ec= module d'élasticité

nu= coefficient de Poisson (non utilisé)

fc= résistance à la compression (non utilisé)

fct= résistance à la traction

phi= coefficient de fluage pour le calcul du module apparent

[ACIER] paramètres de description de l'acier d'armature (obligatoire)

Es= module d'élasticité

fy= limite élastique

[TIRANT] paramètres pour la loi du tirant (facultatif)

BetaT= coefficient de participation du béton tendu (tension-stiffening) ; défaut 0.4

BetaFct= coefficient de définition de la plage de formation des fissures ; défaut 0.25

k= coefficient de réduction de la résistance à la traction pour le long terme ; défaut 1.0

les paramètres suivants de ce groupe ne concernent que la loi du tirant modifiée

BetaRes= coefficient de résistance résiduelle en traction du béton non armé ; défaut 0.12

BetaMid= coefficient de zone d'influence de l'armature ; $b_1 = n \cdot (1 + \beta_{Mid}) \cdot (c + \varnothing/2) \not> b$; pour obtenir la même définition qu'au § 3.2.5, utiliser BetaMid = 1.5 ; défaut 100.0 (= toute la tranche)

testNpl= flag (0-1) ; si activé, contrôle de plastification des aciers sur l'effort, sinon sur epsilon ; défaut 1

fctRes= flag (0-1) ; si activé, utilisation de la résistance résiduelle du béton fissuré ; défaut 1

SansStab= flag(0-1) ; si activé, phase de fissuration stabilisée remplacée par la une droite passant par le point de fin de formation des fissures et le point de plastification des armatures en stade II ; défaut 1

RedEff= flag (0-1) ; si activé, calcul de la section réduite efficace autour des barres, sinon utilisation de la tranche complète ; défaut 1

[CEB] paramètres pour la loi moment-courbure CEB-FIP (facultatif)

beta= coefficient de participation du béton tendu (tension-stiffening) ; défaut 0.5

[SECTION] description de la section (obligatoire). Il est possible de définir certains de ces paramètres, en fonction des autres dimensions de la section (proportions); il suffit pour cela de donner une valeur négative égale, en valeur absolue, au rapport des cotes. Détail donné pour les variables concernées.

nom= nom de la section

type= type de section ; seul modèle disponible pour l'instant : section-I

tranches= nombre de tranches pour le calcul

b1= cf figure; si b1<0, b1 = -b1*b2

b2= cf figure; si b2<0, b2 = -b2*h

t= cf figure; si t<0, t = -t*b2; si t=0, t = b1

h= cf figure

h1= cf figure; si h1<0, h1 = -h1*h

h2= cf figure; si h2<0, h2 = -h2*h

d1= cf figure; si d1<0, d1 = -d1*h

d2= cf figure; si d2<0, d2 = -d2*h

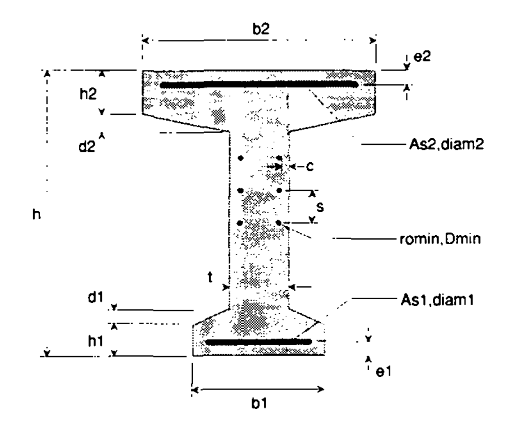
As1= section d'acier de la $1^{ère}$ nappe; si As1<0, As1 = -As1*b2*(h-e1) (taux d'armature)

e1=	enrobage à l'axe de la 1ère nappe depuis le bas de la section
diam1=	diamètre des barres de la 1ère nappe
As2=	section d'acier de la 2ème nappe; si As2<0, As2 = -As2*b1*(h-e2) (taux d'armature)
e2=	enrobage à l'axe de la 2ème nappe depuis le haut de la section
diam2=	diamètre des barres de la 2ème nappe
romin=	taux d'armature constructive, utilisé dans toutes les tranches non touchées par les nappes principales
Dmin=	diamètre des barres constructives
s=	écartement des barres constructives
c=	enrobage des barres constructives

[CALCUL] paramètres définissant le calcul à effectuer (obligatoire)

type=	type de calcul à effectuer :
	type=def : calcul des déformations de la section soumise aux efforts donnés, stade I, stade II et loi du tirant
	type=stadeI : calcul en stade I
	type=stadeII : calcul en stade II
	type=tirant : calcul avec la loi du tirant
	type=LoiMC : calcul des lois moment-courbure de la section
M=	moment appliqué à la section ; pour les lois moment-courbure, il faut aussi donner une valeur non nulle de façon à indiquer le signe du moment pour le calcul
N=	effort normal appliqué à la section
SigmaP=	contrainte de compression appliquée à la section; écrase N si SigmaP<>0

[END] marqueur de fin de fichier (facultatif)



Section type I, description des paramètres géométriques

A.1.4.6 Analyse paramétrique

Pour faire varier un paramètre, il suffit de donner les différentes valeurs séparées par des point-virgule. Par exemple :

h= 1000 ; 2000 ; 3000

AlphaFlex générera automatiquement les 3 fichiers de données correspondants et effectuera le calculs. Attention au nombre de calculs. Si on donne 3 valeurs possibles à 5 paramètres, on obtient déjà une série de 243 calculs !

Afin de différencier les fichiers générés pour une analyse paramétrique, il convient de définir un code désignant chaque calcul. Ce code peut être généré automatiquement à partir des valeurs des parmètres variables. Son format est défini dans le groupe de données [MULTI] du fichier de données (*.dat*). Il peut être composé de 1 à 20 champs définis de la façon suivante :

*Code01=[groupe]variable*c#n*

[groupe]	est le nom du groupe de données contenant la variable
variable	est le nom de la variable
**c*	est le coefficient à appliquer à la valeur de la variable; facultatif
#n	est le nombre de chiffre à afficher

la partie entière de la valeur absolue du produit de la variable par le coefficient est complété par des zéros pour obtenir une chaîne de longueur *n*.

ou bien

Code01=texte

Dans ce cas, *texte* est inséré tel quel dans le code. Pour ce faire, le premier caractère de *texte* ne doit pas être un *[*

Exemple :

```
[MULTI]
DAT=oui
Code01=[CALCUL]SigmaP#1
Code02=-
Code03=[SECTION]h*0.01#2
Code04=[SECTION]b2*0.01#2
```

avec *h=500, b2=1030* et *SigmaP=-3* donne le code

3-0510

Les champs *Code01* à *Code20* sont concaténés et donnent le code complet, qui est utilisé comme nom de section et également comme nom de fichier.

La ligne *DAT=oui* indique que les calculs ne seront pas effectués. Seuls les fichiers de données (*.dat*) seront générés. Pour que les calculs se fassent, cette ligne doit être supprimée (pas de *DAT=non* ou autre).

A.1.4.7 Paramètre calculé en fonction d'un autre

Il est possible de définir n'importe quelle variable réelle du fichier de données comme le produit d'une constante par une autre variable. La syntaxe est la suivante :

*var1= coef * var2*

Il est essentiel de séparer *coef* du symbole de multiplication * par un espace.

A.2 Influence sur le fluage des redistributions de contraintes dues aux armatures

Le coefficient de fluage φ décrit l'augmentation à long terme de la déformation du béton sous contrainte constante. Lorsque le fluage du béton peut se produire librement, il n'entraîne aucune variation de contrainte, et le coefficient de fluage reste applicable tel quel. La présence d'armatures dans le béton armé entrave les déformations dues au fluage, lequel entraîne alors une redistributions des contraintes entre le béton et l'acier. Dès lors, la contrainte dans le béton n'est plus constante et le coefficient de fluage φ ne peut plus être appliqué directement.

Le but de cette annexe est de déterminer l'erreur qui est faite lorsque ces redistributions ne contraintes ne sont pas prises en compte dans le calcul de la fonction de fluage. La méthode du module ajusté [29] permet d'évaluer cette erreur à l'aide du coefficient de vieillissement χ. Rappelons que le coefficient de vieillissement χ est défini de façon standard comme la correction à appliquer au coefficient de fluage pour un historique de contrainte variant de zéro à la valeur finale de σ.

A.2.1 Notations

Taux d'armature

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \tag{A.19}$$

Coefficient de transformation acier-béton instantané

$$\alpha = \frac{E_s}{E_c} \tag{A.20}$$

Section tranformée

$$A' = A_c + A_s \cdot (\alpha - 1) = A_c \cdot (1 + \rho \cdot (\alpha - 1)) \tag{A.21}$$

Module ajusté et section transformée avec coefficient de fluage seul

$$E_c^{\varphi} = \frac{E_c}{1 + \varphi} \tag{A.22}$$

$$A_c^{\varphi} = (A_c - A_s) \cdot E_c^{\varphi} + A_s \cdot E_s - = A_c \cdot (1 + \rho \cdot [\alpha \cdot (1 + \varphi) - 1]) \tag{A.23}$$

Module ajusté et section transformée ajustée

$$E_c^* = \frac{E_c}{1+\chi \cdot \varphi} \tag{A.24}$$

$$A^* = A_c + A_s \cdot \left(\frac{E_s}{E_c^*} - 1 \right) = A_c \cdot (1 + \rho \cdot [\alpha \cdot (1 + \chi \cdot \varphi) - 1]) \tag{A.25}$$

A.2.2 Calcul simplifié (LTM)

Déformation

$$\varepsilon = \frac{N}{E_c^\varphi \cdot A_c^\varphi} \tag{A.26}$$

Contrainte

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c^\varphi} \tag{A.27}$$

Module apparent du béton

$$E_c^{app} = \frac{\sigma_c}{\varepsilon} = E_c^\varphi = \frac{E_c}{1+\varphi} \tag{A.28}$$

A.2.3 Calcul général (TGC 8 [29], p. 226)

Déformation

$$\varepsilon = \varepsilon_o + \varepsilon_L + \varepsilon^* \tag{A.29}$$

$$\varepsilon_o = \frac{N}{E_c \cdot A'} \tag{A.30}$$

$$\varepsilon_L = \varphi \cdot \varepsilon_o \tag{A.31}$$

$$\varepsilon^* = \frac{\Delta\sigma}{E_c^*} \tag{A.32}$$

$$\Delta\sigma = \frac{N^*}{A^*} \tag{A.33}$$

$$N^* = -\varepsilon_L \cdot E_s \cdot A_s \tag{A.34}$$

En combinant (A.29) à (A.34) on obtient

$$B = \frac{\rho \cdot \varphi \cdot \alpha}{1 + \rho \cdot [\alpha \cdot (1 + \chi \cdot \varphi) - 1]} \tag{A.35}$$

$$\Delta\sigma = -\frac{N}{A_c}\cdot\frac{B}{1+\rho\cdot(\alpha-1)} \tag{A.36}$$

$$\varepsilon = \frac{N}{E_c\cdot A_c}\cdot\frac{1+\varphi-B\cdot(1+\chi\cdot\varphi)}{1+\rho\cdot(\alpha-1)} \tag{A.37}$$

Contrainte

$$\sigma_c = \frac{N}{A'}+\Delta\sigma = \frac{N}{A_c}\cdot\frac{1-B}{1+\rho\cdot(\alpha-1)} \tag{A.38}$$

Module apparent du béton

$$E_c^{app} = \frac{\sigma_c}{\varepsilon} = E_c\cdot\frac{1-B}{1+\varphi-B\cdot(1+\chi\cdot\varphi)} \tag{A.39}$$

A.2.4 Comparaison des 2 approches

$$\frac{E_c^{app}\,\textit{général}}{E_c^{app}\,\textit{simplifié}} = \frac{(1+\varphi)\cdot(1-B)}{1+\varphi-B\cdot(1+\chi\cdot\varphi)} \tag{A.40}$$

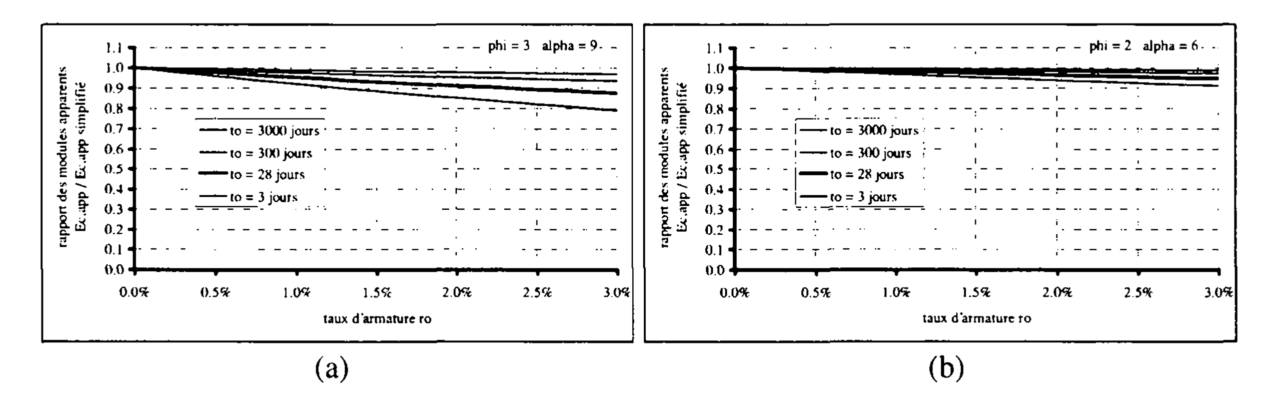


Figure A.1: Erreur sur le module d'élasticité apparent (a) cas extrême : $\varphi = 3$, $\alpha = 9$ (b) cas réaliste : $\varphi = 2$, $\alpha = 6$

Une correction du coefficient de fluage est proposée ici pour obtenir le résultat de la méthode générale par la méthode simplifiée, en utilisant

$$E_c^{app} = \frac{E_c}{1+c_{\chi\varphi}\cdot\varphi} \tag{A.41}$$

au lieu de E_c^{φ}.

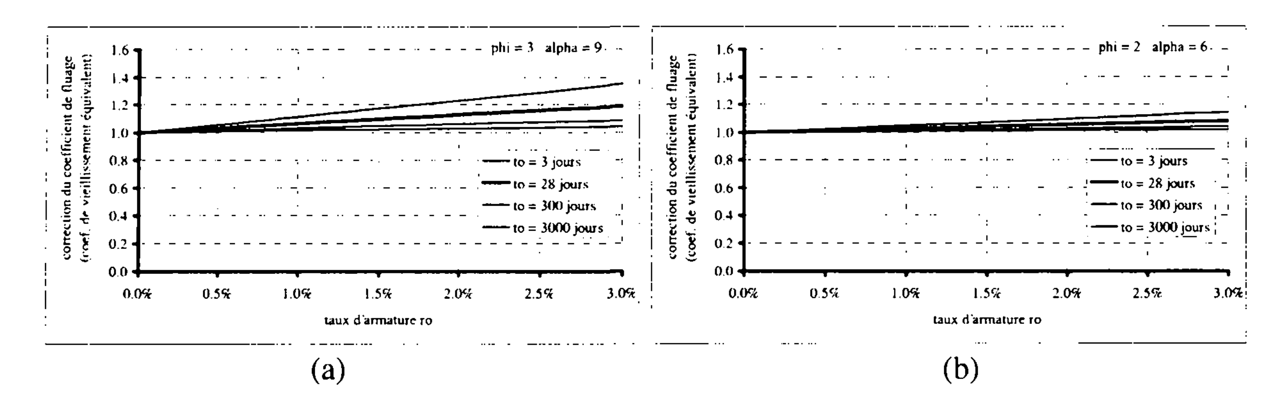


Figure A.2: Correction du coefficient de fluage pour obtenir un module apparent "exact" (a) cas extrême : $\varphi = 3$, $\alpha = 9$ (b) cas réaliste : $\varphi = 2$, $\alpha = 6$

Si on tient compte de la part de fluage due aux redistributions de contraintes engendrées par les armatures, le module apparent du béton est plus faible que si cet aspect est négligé. L'approche simplifiée de la LTM sous-estime donc légèrement les déformations.

Il est intéressant de noter que le coefficient de correction préconisé ici va à l'encontre du coefficient de vieillissement, dont la valeur est inférieure à 1. Ceci tient au fait que le coefficient de vieillissement s'applique en réalité aux seules redistributions de contraintes dues au fluage. Ces variations étant de signe opposé aux contraintes résultantes, il est logique que le coefficient de correction global varie dans le sens opposé au coefficient de vieillissement.

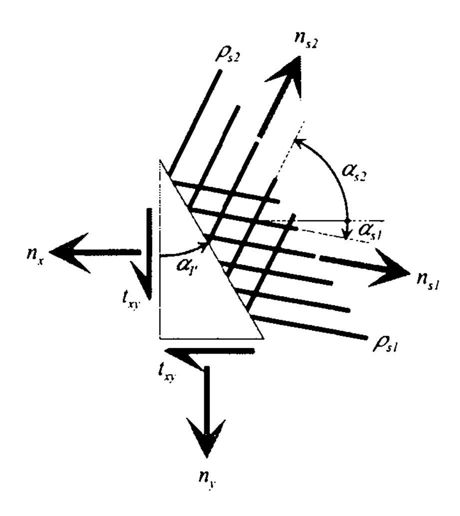
A.2.5 Conclusions

Dans des conditions raisonnables, l'erreur sur la rigidité apparente à long terme du béton reste faible. Il faut conjuguer des conditions extrêmes de fluage et un taux d'armature important pour obtenir une erreur significative. Néanmoins, l'incertitude sur le coefficient de fluage étant potentiellement grande, cela ne représente pas un réel problème. Une étude de sensibilité du comportement structural vis-à-vis du coefficient de fluage reste plus que jamais d'actualité.

A.3 Calcul des contraintes dans les armatures

La méthode simplifiée proposée au paragraphe 5.2.2 pour le calcul des contraintes dans les armatures est basé sur l'hypothèse que les barres sont disposées en 2 nappes orthogonales. La méthode proposée ici traite le cas où l'orientation de ces nappes est quelconque.

Cette méthode est également basée sur l'équilibre des contraintes dans les armatures au droit d'une fissure. Par contre, la plastification des barres n'est pas traitée.



$$n_x \cdot \cos\alpha_{I'} + t_{xy} \cdot \sin\alpha_{I'} = n_{s1} \cdot \cos(\alpha_{s1} - \alpha_{I'}) \cdot \cos\alpha_{s1} + n_{s2} \cdot \cos(\alpha_{s2} - \alpha_{I'}) \cdot \cos\alpha_{s2} \qquad (A.42)$$

$$n_y \cdot \sin\alpha_{I'} + t_{xy} \cdot \cos\alpha_{I'} = n_{s1} \cdot \cos(\alpha_{s1} - \alpha_{I'}) \cdot \sin\alpha_{s1} + n_{s2} \cdot \cos(\alpha_{s2} - \alpha_{I'}) \cdot \sin\alpha_{s2} \qquad (A.43)$$

Les déterminants du système sont

$$\Delta_s = \cos(\alpha_{s1} - \alpha_{I'}) \cdot \cos(\alpha_{s2} - \alpha_{I'}) \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha_{s1} & \cos\alpha_{s2} \\ \sin\alpha_{s1} & \sin\alpha_{s2} \end{vmatrix} \qquad (A.44)$$

$$\Delta_{s1} = \cos(\alpha_{s2} - \alpha_{I'}) \cdot \begin{vmatrix} n_x \cdot \cos\alpha_{I'} + t_{xy} \cdot \sin\alpha_{I'} & \cos\alpha_{s2} \\ n_y \cdot \sin\alpha_{I'} + t_{xy} \cdot \cos\alpha_{I'} & \sin\alpha_{s2} \end{vmatrix} \qquad (A.45)$$

$$\Delta_{s2} = \cos(\alpha_{s1} - \alpha_{I'}) \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha_{s1} & n_x \cdot \cos\alpha_{I'} + t_{xy} \cdot \sin\alpha_{I'} \\ \sin\alpha_{s1} & n_y \cdot \sin\alpha_{I'} + t_{xy} \cdot \cos\alpha_{I'} \end{vmatrix} \qquad (A.46)$$

Et par simplification, on obtient

$$n_{s1} = \frac{\Delta_{s1}}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} n_x \cdot \cos\alpha_{I'} + t_{xy} \cdot \sin\alpha_{I'} & \cos\alpha_{s2} \\ n_y \cdot \sin\alpha_{I'} + t_{xy} \cdot \cos\alpha_{I'} & \sin\alpha_{s2} \end{vmatrix}}{\cos(\alpha_{s1} - \alpha_{I'}) \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha_{s1} & \cos\alpha_{s2} \\ \sin\alpha_{s1} & \sin\alpha_{s2} \end{vmatrix}} \quad \text{(A.47)}$$

$$n_{s2} = \frac{\Delta_{s2}}{\Delta_s} = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha_{s1} & n_x \cdot \cos\alpha_{I'} + t_{xy} \cdot \sin\alpha_{I'} \\ \sin\alpha_{s1} & n_y \cdot \sin\alpha_{I'} + t_{xy} \cdot \cos\alpha_{I'} \end{vmatrix}}{\cos(\alpha_{s2} - \alpha_{I'}) \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha_{s1} & \cos\alpha_{s2} \\ \sin\alpha_{s1} & \sin\alpha_{s2} \end{vmatrix}} \quad \text{(A.48)}$$

Ces deux expressions ne sont pas définies pour des armatures parallèles à la direction de la fissure. Les contraintes s'écrivent

$$\sigma_{s1} = \frac{n_{s1}}{\rho_{s1} \cdot h} \quad \text{et} \quad \sigma_{s2} = \frac{n_{s2}}{\rho_{s2} \cdot h} \quad \text{(A.49)}$$

où h est l'épaisseur de la membrane. Il reste a déterminer la direction de la fissure pour le calcul. La direction de la traction principale moyenne est

$$\tan\alpha_I = \frac{n_I - n_x}{t_{xy}} \quad \text{(A.50)}$$

$$\text{avec} \quad n_I = \frac{n_x + n_y}{2} + \sqrt{\frac{(n_x - n_y)^2}{2} + t_{xy}^2} \quad \text{(A.51)}$$

La direction $\alpha_{I'}$ de la normale à la fissure peut être définie comme suit

$$\alpha_{I'} = \alpha_I + \delta\alpha_I \quad \text{(A.52)}$$

$\delta\alpha_I$ étant la déviation de l'angle de la fissure par rapport à la normale à la traction principale moyenne. En $1^{\text{ère}}$ approximation on peut admettre $\delta\alpha_I = 0$. Ceci correspond à un état d'équilibre hydrostatique des forces. Il faut cependant noter que cette simplification peut donner des résultats particulièrement fantaisistes pour des armatures non orthogonales.

La déviation de la direction de la fissure par rapport aux directions principales moyennes peut aller jusqu'à 5° à l'état de service, et jusqu'à environ 10° à la rupture. Si l'erreur sur les contraintes dans les armatures à l'état de service reste en dessous de 15%, elle peut s'écarter bien davantage à la rupture en raison de la plastification (voir figures A.3 et A.4).

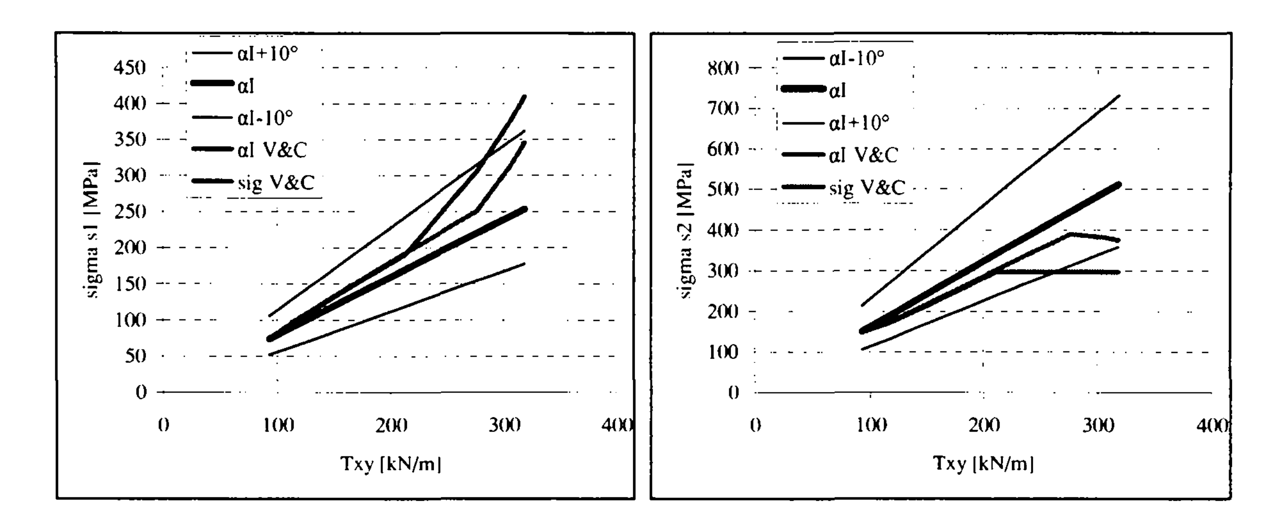


Figure A.3: *Contraintes dans les armatures. Méthode simplifiée, hypothèse de fissuration selon la normale à la traction principale moyenne, ainsi qu'à ±10°, calcul simplifié avec corrections angulaires selon PV20, résultats PV20*

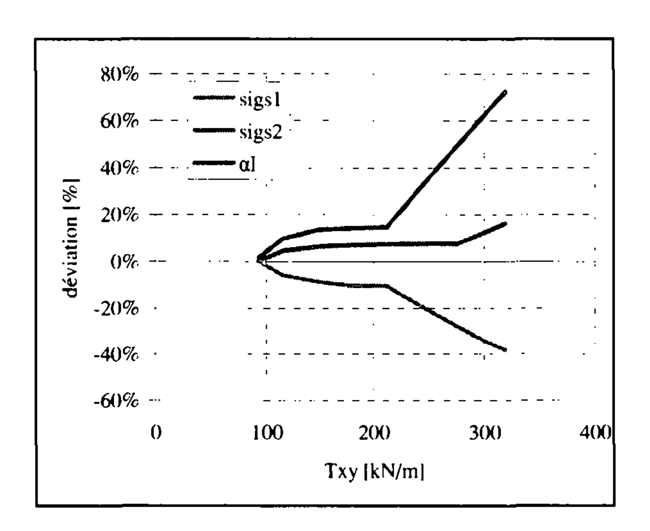


Figure A.4: *Comparaison des résultats : déviation de la méthode simplifiée ($\delta\alpha_l$=0) par rapport aux résultats de PV20. Les grandes déviations apparaissent à la plastification de la nappe d'armature s2. En dessous, les contraintes sont calculées à ±15% de précision, ce qui vaut aussi pour l'ouverture des fissures. L'orientation de ces dernières est correcte à moins de 10% près, soit ±5°.*

A.4 Pont type sur 3 travées

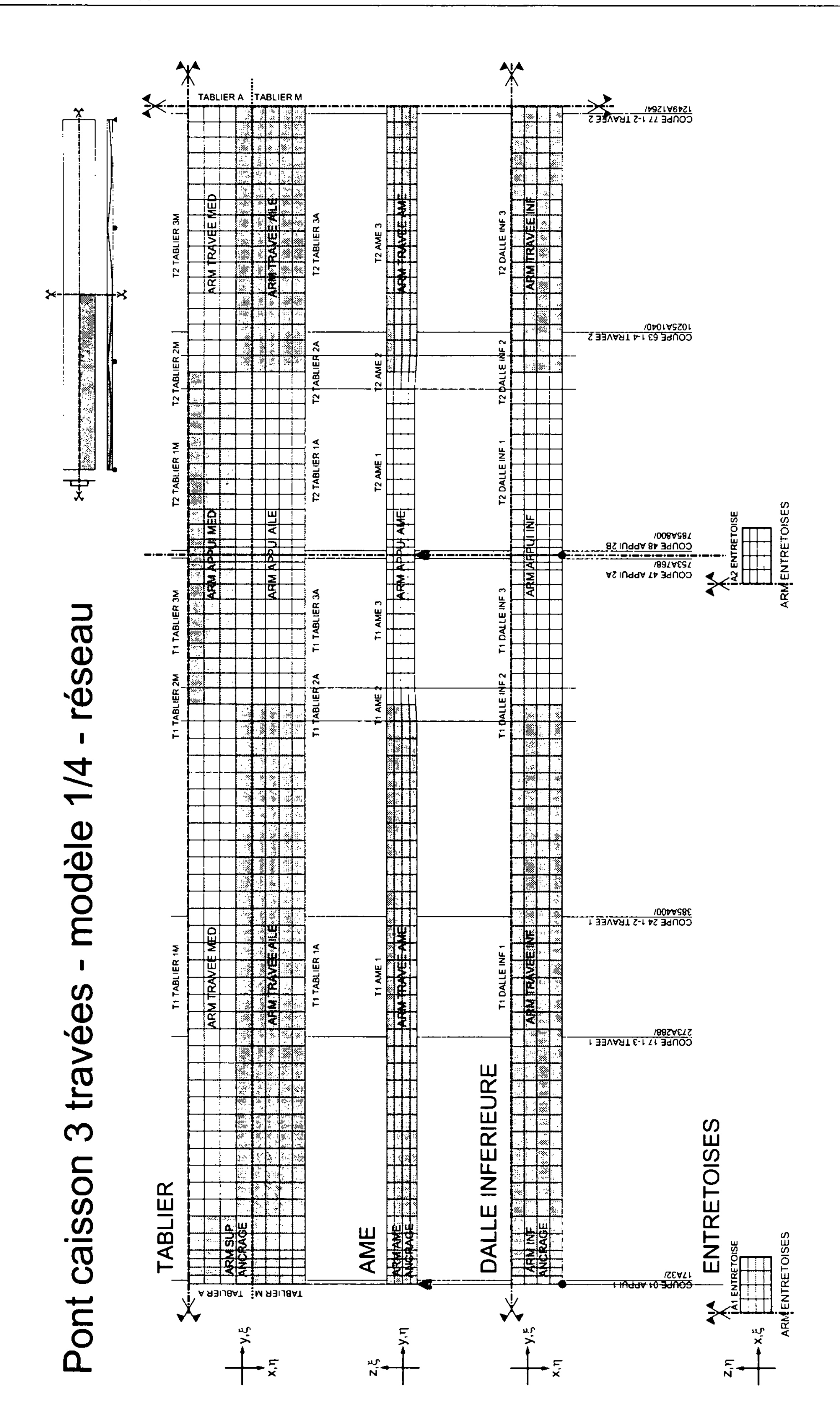
Le tableau ci-contre indique le détail de toutes les armatures disposées dans le pont caisson calculé au paragraphe 5.1.

Toutes les armatures sont disposées en 2 fois 2 nappes perpendiculaires. Le tableau donne le diamètre des barres en mm en fonction de l'élancement du pont et du degré de compensation des déformations. Les écartements sont donnés dans la colonne s.

Sur la page de droite figure une représentation éclatée des différents panneaux du maillage d'éléments finis, avec les systèmes de coordonnées locaux et global, ainsi que les appuis et les conditions de symétrie. Les ombrages correspondent aux différentes zone d'armatures, dont les noms sont repris dans la dernière colonne du tableau ci-contre. La zone ARM APPUI INF correspond également à la surépaisseur de la dalle inférieure (500 mm au lieu de 200 mm).

Le quart de pont modélisé totalise 1264 éléments de coque cubiques (4 nœuds par côté)

	paroi	direction	s [mm]	élancement 16					20					24					28					
			β	0.0	0.3	0.6	0.8	1.0	0.0	0.3	0.6	0.8	1.0	0.0	0.3	0.6	0.8	1.0	0.0	0.3	0.6	0.8	1.0	
Appui intermédiaire	dalle sup aile	longitudinal	10	20	18	12	10	10	22	20	14	10	10	26	20	16	12	10	26	14	8	8	8	ARM APPUI AILE
		transversal	10	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	
	dalle sup méd	longitudinal	10	20	18	12	10	10	22	20	14	10	10	26	20	16	12	10	26	14	8	8	8	ARM APPUI MED
		transversal	10	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	
	dalle inf	longitudinal	10	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	ARM APPUI INF
		transversal	20	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	
	âme	longitudinal	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	ARM APPUI AME
		étriers	10	16	14	12	12	10	18	16	14	12	10	20	18	16	14	12	22	20	18	16	12	
Travées	dalle sup aile	longitudinal	10	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	ARM TRAVEE AILE
		transversal	10	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	
	dalle sup méd	longitudinal	10	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	ARM TRAVEE MED
		transversal	10	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	
	dalle inf	longitudinal	10	18	10	8	8	8	20	12	8	8	8	22	12	8	8	8	26	14	8	8	8	ARM TRAVEE INF
		transversal	20	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	
	âme	longitudinal	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	ARM TRAVEE AME
		étriers	10	16	14	12	12	10	18	16	14	12	10	20	18	16	14	12	22	20	18	16	12	
Entretoises		transversal	15	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	ARM ENTRETOISES
		vertical	15	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	
Zone d'ancrage		transversal	10	16	16	16	16	16	18	18	18	18	18	20	20	20	20	20	22	22	22	22	22	ARM SUP ANCRAGE ARM INF ANCRAGE ARM AME ANCRAGE



Pont caisson 3 travées - modèle 1/4 - réseau
TABLIER
AME
DALLE INFERIEURE
ENTRETOISES
TABLIER A
TABLIER M
ARM SUP
ANCRAGE
ARM TRAVEE MED
ARM TRAVEE AILE
ARM APPUI MED
ARM APPUI AILE
ARM AME
ARM TRAVEE AME
ARM APPUI AME
ARM INF
ARM TRAVEE INF
ARM APPUI INF
T1 TABLIER 1M
T1 TABLIER 1A
T1 TABLIER 2M
T1 TABLIER 2A
T1 TABLIER 3M
T1 TABLIER 3A
T2 TABLIER 1M
T2 TABLIER 1A
T2 TABLIER 2M
T2 TABLIER 2A
T2 TABLIER 3M
T2 TABLIER 3A
T1 AME 1
T1 AME 2
T1 AME 3
T2 AME 1
T2 AME 2
T2 AME 3
T1 DALLE INF 1
T1 DALLE INF 2
T1 DALLE INF 3
T2 DALLE INF 1
T2 DALLE INF 2
T2 DALLE INF 3
A1 ENTRETOISE
A2 ENTRETOISE
ARM ENTRETOISES

Liste des figures

Curriculum Vitae

Stéphane ROSSIER

Né le 28 janvier 1970 à Fribourg

Formation

1985-1989	Collège St-Michel, Fribourg Maturité fédérale type C
1989-1993	Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne Diplôme d'ingénieur civil
1993-1994	Heriot-Watt University, Edinburgh, United Kingdom Civil and Offshore Engineering dept. Travail pratique de diplôme dans le cadre du programme ERASMUS

Activités professionnelles

1992-1993	Cours de construction au département de Génie Rural de l'EPFL comme assistant de construction
1994	Bongard & Zwick Ingénieurs-Conseils à Fribourg
1995-1996	MAPS Diffusion SA, Le Mont-sur-Lausanne Développement de logiciels de calcul pour le génie civil Calcul de structures
depuis 1996	Assistant à l'Institut de Béton Armé et Précontraint à l'EPFL Collaboration à plusieurs projets de recherche en cours à l'IBAP Assistanat aux exercices du 2ème cycle Participation à l'administration du parc informatique de l'IBAP Projet de recherche traitant de l'analyse numérique non-linéaire des structures en béton à parois minces